I 24771

2022

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

APARE LA 15 A FIECĂREI LUNI

VOLUMUL XVIII.

—

ANUL 1938—1939.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

TIMIȘOARA
INSTITUT DE ARTE GRAFICE „TIPOGRAFIA ROMANEASCĂ"
1939.

24171

ANUL XVIII. 15 MARTIE 1938 No. 1.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 **O. N. ȚINO:** O TEOREMA IMPORTANTA DE GEOMETRIE ELEMENTARA.

2. NOTE MATEMATICE: 1.

3 BIBLIOGRAFIE.

4. PROBLEME REZOLVATE: 1279 1282, 1292, 1388 1570.

5. PROBLEME PROPUSE: 1658-1665.

6. INFORMATIUNI

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

TIMISOARA

Institut de Arte grafice Tipografia Românească

2465

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu,** Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVII inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

Revista Matematică din Timişoara, apare sub conducerea unui comitet compus din:

1. **Abason E.** Inginer, Doctor în Matematici, Profesor şi Sub-Director la Şc. Politechnică din Bucureşti, Mateiu Voevod 25, Bucureşti.
2. **Abramescu N.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj.
3. **Adam D. R.** Sublt. de geniu, str. M. Cogâlniceanu 31, Bucureşti.
4. **Adamescu M.** Licenţiat în Matematici, Inspector Financiar, str. Flondor 37, Cernăuţi.
5. **Alaci V.** Doctor în Matematici, Profesor la Şc. Politechnică, Timişoara.
6. **Almăjan P.** Locot., Licenţiat în matematici, str. Zaharia 23, Bucureşti.
7. **Anastasiade I.** Inginer, Profesor de Material Rulant de cale Ferată, înzestrarea căilor ferate, întinderea exploatării, la Şc. Polit., Timişoara.
8. **Andronescu P.** Doctor-Inginer, Profesor de Electrotechnică la Şc. Polit., Timişoara.
9. **Angelescu A.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Bucureşti.
10. **Angheluţă Th.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj.
11. **Ardeleanu St.** Inginer, Profesor la Şcoala Sup. de Arte şi Meserii, Asistent pe lângă catedra de Technologie, Şc. Polit., Timişoara.
12. **Arghir I.** Profesor la Liceul din Tg.-Jiu.
13. **Baidaff B. I.** Doctor în Matematici, Buenos Aires, Republica Argentina (Avenida de Mayo 560).
14. **Bakony C.** Inginer, Profesor de Technologie la Şc. Polit, Timişoara.
15. **Balazs D.** Inginer, Asistent pe lângă Catedra de Geometrie Descriptivă dela Şc. Polit., Timişoara, str. Gen. Joffre 12.
16. **Bănărescu M.** Inginer, Director la Atelierele C. F. R., Profesor la Catedra de Maşini Termice dela Şc. Polit., Timişoara, str. Doja 51.
17. **Banciu I.** Prof., Directorul „Casei de Depuneri", str. Lucaci 95, Bucureşti.
18. **Bărglăzan A.** Inginer, Conferenţiar la Maşini Hidraulice, dela Şc. Polit., Timişoara.
19. **Baron C.** Asistent la catedra de Fizică dela Şc. Politechnică, Timişoara.
20. **Blaşian V.** Inginer de Mine, Profesor la catedra de Exploatări Miniere dela Şc. Polit., Timişoara.
21. **Bobârnac M.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Maşini Termice dela Şc. Polit., Timişoara.
22. **Bonea I.** Inginer, Conferenţiar la Topografie şi Geodezie, Şcoala Politechnică, Timişoara.
23. **Botez M.** Doctor în Matematici, Directorul Şcoalei Superioare de Comerţ din Piatra-Neamţ.
24. **Botez M.** Profesor la Şc. Normală şi Liceul Milit., str. Speranţei 12, Iaşi.
25. **Bratu Gh.** Doctor în Matematici, Profesor la catedra de astronomie dela Universitatea din Cluj.
26. **Breazu D.** Profesor de liceu, Bucureşti.
27. **Buiciu Gh.** General de Artilerie. Ministerul Apărării Naţionale, Inspectoratul Artileriei. Fost 10 ani profesor de Geometrie Analitică la Şcoala Politechnică din Timişoara. Însărcinat cu conferinţa de Balistica Exterioară la Şcoala Politechnică din Bucureşti, str. Dr. Lister 5, Bucureşti 6.
28. **Câlniceanu C.** Inginer, Conferenţiar, Asistent pe lângă catedra de Organe de Maşini la Şc. Polit, Timişoara.
29. **Cândea C.** Doctor-Inginer, Profesor şi membru în Comitetul de Direcţie la Şc. Polit. din Timişoara.
30. **Catona V.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Măsuri Electrice la Şc Polit din Timişoara.
31. **Claudian Virgil.** Profesor la liceul Mihai Viteazul din Bucureşti.
32. **Coca A.** Licenţiat în Litere, Lector de limba engleză la Şc. Polit. din Timişoara.
33. **Coman A.** Profesor liceul „C. Diaconovici-Loga, Profesor onorific la Şc. Politechnică din Timişoara.
34. **Comărescu A.** Licenţiat în Matematici, Profesor la liceul din T-Măgurele.
35. **Constantinescu G. G.** Licenţiat în Matematici, Profesor la liceul din Tecuci.
36. **Constantinescu Gh.** Profesor, la lic. Lazăr, Bucureşti.
37. **Contrea A.** Doctor în Ştiinţele Naturale, Asistent pe lângă catedra de Mineralogie şi Petrografie dela Şc. Polit, Timişoara.
38. **Costăchescu D. C.** Lt. de Marină, Constanţa.
39. **Cristescu I.** Inginer, Profesor la Şc. Politechnică, Timişoara.
40. **Cristodulo N.** Licenţiat în Chimie, Asistent pe lângă catedra de Chimie dela Şc. Polit., Timişoara.
41. **Cserveny I.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Centrale Electrice dela Şc. Polit, Timişoara.
42. **Curea I.** Profesor de matematici la liceul din Cluj şi astronom la Observatorul Universităţii.
43. **Demetrescu Gh.** Doctor în Matematici, Subdirector la Observatorul Astronomic din Bucureşti.
44. **Diaconescu N.** Profesor la liceul din Slatina.
45. **Dobrozemsky M.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Exploatări Miniere dela Şc. Polit., Timişoara.
46. **Dumitriu-Dada.** Profesor la Colegiul Carol I, Craiova
47. **Florescu M.** Inginer Inspector Silvic, str. A. Orescu 9, Bucureşti
48. **Frătici I.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Cazane, dela Şc. Politechnică, Timişoara.
49. **Georgescu D.** Profesor la Liceul din Piteşti.
50. **Gheorghiu V.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Mecanică şi Hidraulică dela Şc. Polit., Timişoara.
51. **Ghermănescu M.** Doctor în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică, Timişoara.
52. **Ghiţescu Spirîdon.** Profesor secundar, Mizil.
53. **Gloden A.** Professeur à l'Athénée, Rue Jean Jaurès 11, Luxembourg.
54. **Hristea H.** Inginer-Inspector General la C. F. R., Bucureşti.
55. **Ionescu-Biss H. P.** Profesor la liceul din Oltenita.
56. **Ionescu C-tin Bujor.** Licenţiat în Matematici, Profesor, str. Maior Popescu Gh. 26, Bucureşti.
57. **Ionescu-Ţiu D. C.** Locot., Licenţiat în Matematici, str. Popa-Tatu 17, Bucureşti.
58. **Iorgulescu T.** Prof. la liceul Loga, Asistent pe lângă catedra de Geologie dela Şc. Polit., Timişoara.
59. **Kielburger M.** Inginer, Asistent pe lângă Catedra de Electrotechnică dela Şc. Polit., Timişoara.
60. **Kühn I.** Doctor în Chimie, Asistent pe lângă Catedra de Chimie Generală dela Şc. Polit., Timişoara.

61. **Lambrino Gh.** Doctor în Drept şi Economie Politică. Conferenţiar de Economie Politică şi Legislaţie Industrială la Şc. Polit., Timişoara.
62. **Laţiu V.** Doctor în Ştiinţele Naturale, Profesor la Catedra de Mineralogie şi Petrografie dela Şcoala Polit, Timişoara.
63. **Leonida D.** Inginer, Prof. la Şc. Polit., Timişoara.
64. **Linteş I.** Maior de Artilerie, str. Epicol 49. Bucureşti
65. **Liteanu Gh.** Colonel de Artilerie, str. L. Carageale 30, Bucureşti.
66. **Lupan A.** Inginer, Prof. la Şc. Polit. din Timişoara.
67. **Macovski Eug.** Doctor în chimie, Conferenţiar la Şcoala Politechnică din Timişoara.
68. **Magheru I.** Doctor în Ştiinţe, Prof. la Şc. Politechnică din Timişoara.
69. **Manughevici C.** Inginer-chimist, şef de Lucrări la Şc. Politechnică, Timişoara.
70. **Mardan D.** Inginer inspector general, Directorul Fabricei de tutun, Prof la Şc. Polit, din Timişoara.
71. **Marinescu I.** Doctor-Inginer, Conferenţiar la Şc Politechnică din Timişoara.
72. **Mateescu S.** Doctor în Ştiinţele Naturale, Profesor la Catedra de Geologie dela Şc. Polit. din Timişoara.
73. **Mihaiu Emil.** Profesor la liceul Comercial din Timişoara.
74. **Mihăileanu N. N.** Profesor la lic. din Arad
75. **Miloia I.** Doctor în Litere şi Istoria Artelor, Asistent pe lângă catedra de Geometrie Discriptivă dela Şcoala Polit, Timişoara.
76. **Mioc V.** Licenţiat în Matematici, Inspector şcolar, Asistent pe lângă catedra de Analiza Matematică dela Şc. Polit. din Timişoara.
77. **Murgulescu Elena.** Licenţiată în Matematici, Asistentă la Şc. Polit. din Timişoara.
78. **Murgulescu G. I.** Doctor în chimie, Conferenţiar la Şc. Polit., din Timişoara
79. **Nadaşan Şt.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Rezistenţa Materialelor dela Şc. Polit., Timişoara.
80. **Naneş Gh.** Profesor la lic. Sf. Sava, Bucureşti.
81. **Niculescu Gh.** Comandor, inginer, str. Izvor 98, Bucureşti.
82. **Niculescu Miron.** Doctor în Matematici, profesor la Universitatea din Cernăuţi.
83. **Nichifor Gh.** Doctor în Matematici, profesor la Universitatea din Bucureşti, Str. Racoviţă 32, Bucureşti.
84. **Nicolau A.** Inginer, Profesor la Şc. Polit. din Timişoara.
85. **Nicolau P.** Inginer, Profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara.
86. **Ogrin N.** Doctor în Ştiinţele Comerciale, Conferenţiar la Şc. Polit. din Timişoara.
87. **Onicescu O.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Bucureşti, str Clopotarii Vechi 25, Bucureşti.
88. **Orăşeanu C.** Inginer-şef, Licenţiat în Matematici, Profesor la Şcoala Politechnică, Bucureşti.
89. **Orăşeanu Gr.** Profesor secundar, Bucureşti.
90. **Patriciu Valeriu.** Doctor. Profesor la catedra de Geologie Economică şi Zăcăminte, la Şcoala Politechnică, Timişcara.
91. **Petrescu A.** Profesor la Academia Agricolă, Bucureşti.
92. **Popescu E.** Doctor în chimie, Profesor la Şcoala Polit., Bucureşti.
93. **Popescu I.** Inginer, Profesor de Maşini Miniere şi Decan la Şc. Polit din Timişoara.
94. **Protopopescu I.** Inginer-Şef, Profesor la Şcoala Polit. din Timişoara.
95. **Purcariu I.** Director-General al Invăţământului Profesional din Ministerul Instrucţiunii Publice, Bucureşti.
96. **Racliş N. R.** Doctor în Matematici, Directorul Institutului Matematic Român, Profesor, Bucureşti.
97. **Răduleţ R.** Doctor-Inginer, Conferenţiar la Şcoala Politechnică din Timişoara
98. **Roibănescu C.** Profesor, Bucureşti.
99. **Sauciuc L.** Licenţiat în chimie, Asistent pe lângă Catedra de Chimie dela Şc. Polit. din Timişoara.
100. **Savin C. Ion.** Licenţiat în Matematici, str. Sărăriei 56, Iaşi.
101. **Schileru I.** Inginer, Conferenţiar la Şc. Polit. din Timişoara, Directorul Şcoalei P. T. T., Timişoara.
102. **Sergescu P.** Doctor în Matemetici, Licenţiat în Filozofie, Profesor la Universitatea din Cluj.
103. **Severineanu C.** Inginer-Şef, Subdirectorul Tracţiunii C. F. R., Profesor la Universitatea din Cluj
104. **Simionescu Gh. D.** Licenţiat în Matematici, Profesor la lic. Militar din Târgovişte.
105. **Smighelschi O.** Inginer la Fabrica „Nitrogen". Dicio-Sân Martin.
106. **Stamatescu I.** Profesor la Liceul „Matei Basarab" şi „Seminarul Pedagogic Universitar", Bucureşti.
107. **Stambuleanu A.** Doctor-Inginer la C.F.R., Timişoara.
108. **Stan A.** Locotenent de Artilerie, licenţiat matematici, Cluj.
109. **Stăncescu C.** Doctor-Inginer, Profesor la Şc. Polit. din Timişoara.
110. **Stantzel E.** Inginer, Asistent pe lângă Catedra de Construcţii dela Şc. Polit., Timişoara.
111. **Stoicescu L.** Inginer, Conferenţiar la Elemente de Maşini şi Cursul General de Maşini dela Şcoala Polit. din Timişoara.
112. **Stoicescu M** Profesor la liceul „G. Lazăr", Bucureşti.
113. **Suhov I.** Inginer, Asistent la Şc. Polit., Timişoara.
114. **Teodorescu C.** Inginer-Şef, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.
115. **Teodosiu A.** Doctor în Matematici, Profesor la Academia de Agricultură din Cluj.
116. **Ţino O.** Doctor în Matematici, Profesor la Catedra de Geometria Analitică dela Şc. Polit., Timişoara.
117. **Vâlcovici V.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Bucureşti, Preşedinte al Consiliului de perfecţionare al Şcoalei Politechnice din Timişoara, Str. Londra 44, Bucureşti.
118. **Vescan T.** Profesor, Licenţiat în Ştiinţe Fizice şi Matematice, preparator al Institutului de Fizică teoretică şi aplicată al Universităţii din Cluj.
119. **Viciu Aurel.** Profesor la lic. Milit., Tg-Mureş.
120. **Vlad. I. V.** Inginer-Architect, Profesor la Şc. Polit. din Timişoara
121. **Vlădescu I** Doctor-Inginer, Conferenţiar la Şc. Polit din Timişoara
122. **Zăgănescu I.** Inginer la C. F. R. şi Asistent la Şc. Polit., Timişoara.
123. **Zaharia N. O.** Profesor la liceul Militar, Tg-Mureş
124. **Zapan Gr.** Lt. Comandor-Aviator, Inginer diplomat al Şcoalei Superioare de Aeronautică şi Construcţii Mecaniciei (E. S. A.) din Paris. Bucureşti II, Calea Griviţei 158.

ANUL XVIII — No. 1 TIMISOARA, 15 MARTIE 1938

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

O TEOREMĂ IMPORTANTĂ DE GEOMETRIE ELEMENTARĂ

de O. N. ŢINO

1. Să considerăm două triunghiuri BAC şi $B'AC'$ având *unghiul* A *comun*. Fie M şi M' punctele unde bisectoarea unghiului A taie laturile BC şi $B'C'$. După o proprietate cunoscută a bisectoarei avem relaţiunile:

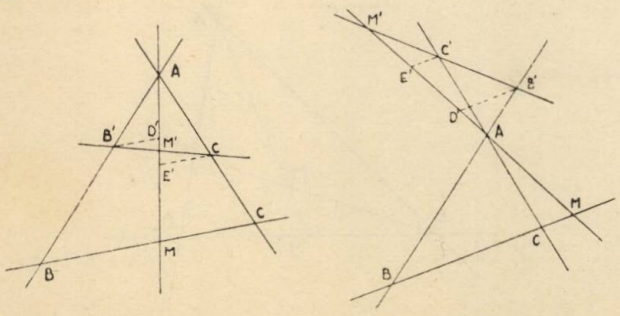
$$\frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad (1) \qquad \text{şi} \qquad \frac{\overline{B'M'}}{\overline{M'C'}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} \quad (2)$$

din care deducem imediat relaţiunea:

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} : \frac{\overline{B'M'}}{\overline{M'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} : \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} \quad (3).$$

2. In cele ce urmează, vom arăta, că proprietatea (3) aparţine oricărei alte drepte trecând prin vârful A, anume vom demonstra proprietatea următoare:

Dacă două triunghiuri au un unghiu comun şi ducem prin vârful acestui unghiu o dreaptă oarecare, raportul rapoartelor determinate pe laturile opuse unghiului comun este egal cu raportul rapoartelor laturilor unghiului în cele două triunghiuri.



Fie BAC şi $B'AC'$ două triunghiuri având unghiul A comun şi o dreaptă oarecare Δ trecând prin vârful A şi care determină pe BC şi $B'C'$ punctele M şi M' respectiv.

Să arătăm că avem relaţiunea:

$$\boxed{\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} : \frac{\overline{M'B'}}{\overline{M'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} : \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}} \quad (R).$$

Din punctele B', C' ducem paralele la BC, care tae pe AM în punctele D', E' respectiv. Triunghiurile $B'M'D'$ şi $C'M'E'$ fiind asemenea prin construcţie, avem:

$$\frac{\overline{M'B'}}{\overline{M'C'}} = \frac{\overline{B'D'}}{\overline{C'E'}} \quad (4).$$

Dar aplicând teorema lui *Thales* în triunghiurile BAM şi CAM relativ la paralelele la BC, avem:

$$\frac{\overline{B'D'}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} \quad (5) \qquad \text{şi} \qquad \frac{\overline{C'E'}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} \quad (6).$$

Impărţind (5) şi (6) parte cu parte, obţinem:

$$\frac{\overline{B'D'}}{\overline{C'E'}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \quad (7).$$

Inmulţind acum relaţiunile (4) şi (7) parte cu parte, avem suprimând factorul comun $\frac{\overline{B'D'}}{\overline{C'E'}}$:

$$\frac{\overline{M'B'}}{\overline{M'C'}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}},$$

sau încă:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} : \frac{\overline{M'B'}}{\overline{M'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} : \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}},$$

care este tocmai relaţiunea (R).

(Demonstraţia este valabilă fie că BC şi $B'C'$ sunt deaceeaşi parte a vârfului A, sau de oparte şi dealta, fie că dreapta Δ este interioară sau exterioară unghiului A.)

3. Reciproca proprietății de mai sus este adevărată, anume:

Dacă în două triunghiuri cu un unghiu comun pe laturile opuse lui avem două puncte, astfel ca raportul rapoartelor determinate de ele pe aceste laturi este egal cu raportul rapoartelor laturilor unghiului comun respectiv în cele două triunghiuri, dreapta celor două puncte trece prin vârful unghiului comun.

In triunghiurile BAC și $B'AC'$ având unghiul A comun (iar B, B' pe aceeași latură) și două puncte M și M' pe dreptele BC și $B'C'$ astfel ca să avem relația (R) împlinită, *dreapta* MM' *trece prin vârful* A. Să presupunem că proprietatea nu este adevărată, și că în acest caz dreapta AM taie pe $B'C'$ într'un punct N'. După teorema directă, avem:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} : \frac{\overline{N'B'}}{\overline{N'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} : \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} \qquad (R').$$

Impărțind relațiunile (R) și (R') obținem:

$$\frac{\overline{N'B'}}{\overline{N'C'}} = \frac{\overline{M'B'}}{\overline{M'C'}},$$

deci în acest caz ar exista pe dreapta $B'C'$ două puncte M' și N', care să determine același raport pe segmentul $\overline{B'C'}$, ceea ce nu poate avea loc.

Așadar, *dacă într'un unghiu sunt înscrise două segmente de dreaptă, condițiunea, NECESARĂ și SUFICIENTĂ, pentru ca dreapta a două puncte de pe ele să treacă prin vârful unghiului, este dată de relațiunea* (R).

4. Dacă $B'C'$ este paralelă cu BC, având în acest caz:

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}},$$

relațiunea (R) devine:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{M'B'}}{\overline{M'C'}},$$

adică obținem relațiunea pe care o determină un fascicol de trei drepte concurente pe două drepte paralele. (Cu cazul particular al fascicolului format de două laturi ale unui triunghiu și mediana adiacentă).

5. Dacă dreapta $B'C'$ este antiparalelă la BC, având în acest caz:

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}},$$

relațiunea (R) devine:

$$\boxed{\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} : \frac{\overline{M'B'}}{\overline{M'C'}} = \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\right)^2} \qquad (R_1).$$

Observare. Dacă BC determină un triunghiu BAC isoscel ($\overline{AB} = \overline{AC}$), avem, pentru orice antiparalelă $B'C'$ la BC și orice dreaptă Δ trecând prin A, relațiunea:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{M'B'}}{\overline{M'C'}},$$

ceea ce era evident deoarece antiparalela la baza unui triunghiu isoscel se confundă cu o paralelă la această bază.

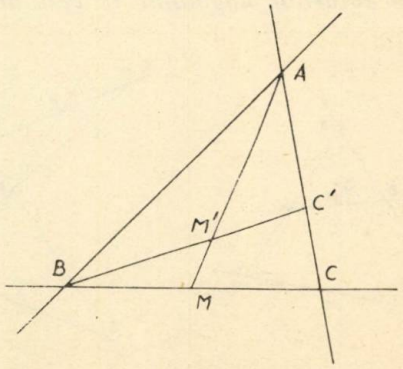
6. *Dacă mediana unui triunghiu taie un segment înscris în unghiul corespunzător în părți egale, acel segment este paralel cu latura corespunzătoare medianei.*

In acest caz având $\overline{M'C'} = \overline{B'M'}$ și $\overline{MC} = \overline{BM}$. relațiunea (R) devine:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} : \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} = +1 \quad \text{sau} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}},$$

deci, după reciproca teoremii lui *Thales*, dreapta $B'C'$ este paralelă la BC.

7. *Teoremele lui Menelaus și Ceva.* O consecință importantă a teoremei demonstrate este teo-



rema lui *Menelaus*, pe care o obținem particularizând teorema noastră.

In adevăr, este de ajuns să observăm că teorema subzistă şi demonstraţia se simplifică, dacă presupunem de exemplu că B′ se confundă cu B. In acest caz, având $\overline{AB'} = \overline{AB}$, relaţiunea (R) devine:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} : \frac{\overline{M'B}}{\overline{M'C'}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}},$$

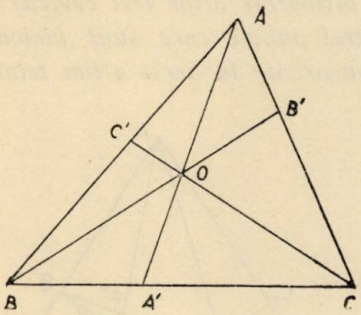
sau încă

$$\boxed{\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{M'C'}}{\overline{M'B}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = +1} \quad (8),$$

care interpretată este tocmai teorema lui *Menelaus:*

Transversala oarecare AM′M *determină pe laturile triunghiului* BCC′ *trei rapoarte al căror produs este egal cu* +1.

Din reciproca teoremei noastre rezultă reciproca teoremii lui *Menelaus.*



Fie acum triunghiul ABC şi A′, B′, C′ picioarele cevienelor AO, BO, CO pe laturile triunghiului. Considerând triunghiurile AC′C şi ABC cu dreapta AOA′ avem:

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} : \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}} \quad (9).$$

Asemenea, considerând triunghiurile CAC′ şi CAB cu dreapta BOB′, avem:

$$\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} : \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} = \frac{\overline{BC'}}{\overline{BA}} \quad (10).$$

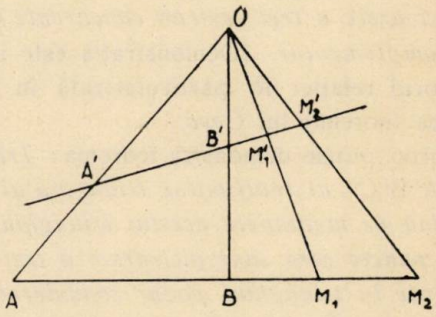
Inmulţind relaţiunile (9) cu (10), avem relaţiunea lui *Ceva:*

$$\boxed{\frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} \cdot \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} = -1} \quad (11)$$

Se explică astfel legătura dintre teorema lui *Ceva* şi teorema lui *Menelaus.*

8. Dar proprietatea interesantă, că *raportul anarmonic determinat de un fascicol de patru drepte pe o dreptă oarecare din plan este constant,* este deasemenea o consecinţă imediată a teoremii noastre.

Fie triunghiurile OAB şi OA′B′ având unghiul O comun şi două drepte Δ_1 şi Δ_2 trecând prin O şi determinând respectiv pe AB şi A′B′ perechile de puncte (M_1, M_1') şi (M_2, M_2').



Aplicând teorema noastră triunghiurilor considerate cu dreapta Δ_1, avem relaţia:

$$\frac{\overline{M_1A}}{\overline{M_1B}} : \frac{\overline{M_1'A'}}{\overline{M_1'B'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} : \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} \quad (12).$$

Aplicând din nou aceloraşi triunghiuri cu dreapta Δ_2, avem relaţia:

$$\frac{\overline{M_2A}}{\overline{M_2B}} : \frac{\overline{M_2'A'}}{\overline{M_2'B'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} : \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} \quad (13).$$

Comparând relaţiunile (12) şi (13), deducem:

$$\frac{\overline{M_1A}}{\overline{M_1B}} : \frac{\overline{M_2A}}{\overline{M_2B}} = \frac{\overline{M'A'}}{\overline{M_1'B'}} : \frac{\overline{M_2'A'}}{\overline{M_2'B'}} \quad (14),$$

sau încă

$$(A, B, M_1, M_2) = (A', B', M_1', M_2') \quad (15).$$

9. **Alte aplicaţiuni.** *Dacă pe laturile* $\overline{AB}$ *şi* $\overline{AC}$ *ale triunghiului* ABC *luăm respectiv segmentele* $\overline{AB'}$ *şi* $\overline{AC'}$ *egale între ele, mediana vârfului* A *determină pe segmentul* $\overline{B'C'}$ *un raport invers egal cu raportul laturilor* AB *şi* AC. *(Housel. Introducere la Geometria Superioară, pag. 175.)*

Insemnând cu M′ punctul determinat de mediana AM pe B′C′, avem, aplicând relaţiunea (R) şi ţinând seamă că $\overline{MB} = \overline{CM}$, $\overline{AB'} = \overline{AC'}$, relaţiunea:

$$\frac{\overline{M'B'}}{\overline{C'M'}} = 1 : \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\right), \quad \text{sau} \quad \boxed{\frac{\overline{M'B'}}{\overline{C'M'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}} \quad (16).$$

10. Se cunoaşte proprietatea pe care o are triunghiul complementar (determinat de picioarele medianelor) al unui triunghiu şi înălţimile acestui triunghiu, anume: *Punctele, unde înălţimile unui triunghiu sunt întâlnite de laturile triunghiului complementar corespunzătoare în acel triunghiu, sunt picioarele a trei ceviene concurente în triunghiul complementar.* [Demonstraţia este imediată cu ajutorul relaţiei (R) particularizată în acest şi reciproca teoremii lui *Ceva.*]

Reciproc, putem demonstra teorema: *Triunghiul podar* $A'B'C'$ *al înălţimilor triunghiului* ABC, *determină pe medianele acestui triunghiu respectiv trei puncte care sunt picioarele a trei ceviene concurente în triunghiul podar considerat.*

Fie A_1, B_1, C_1 piciorele medianelor AA_1, BB_1, CC_1 ale triunghiului ABC şi A'', B'', C'' punctele unde sunt întâlnite de laturile corespunzătoare ale triunghiului podar $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$. Aplicând relaţiunea (R) triunghiurilor $AC'B'$ şi ABC cu transversala $AA''A_1$, avem:

$$\frac{\overline{A''C'}}{\overline{A''B'}} : \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}} : \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad (17'),$$

sau încă:

$$\frac{\overline{A''C'}}{\overline{A''B'}} = -\frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}} : \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad (17).$$

In mod analog, considerând perechile de triunghiuri $(BA'C', BCA)$ şi $(CB'A', CAB)$ cu transversalele respective BB_1 şi CC_1, avem relaţiunile:

$$\frac{\overline{B''A'}}{\overline{B''C'}} = -\frac{\overline{BA'}}{\overline{BC'}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} \quad (18)$$

şi

$$\frac{\overline{C''B'}}{\overline{C''A'}} = -\frac{\overline{CB'}}{\overline{CA'}} : \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \quad (19).$$

Inmulţind parte cu parte egalităţile (17), (18), (19), avem:

$$\frac{\overline{A''C'}}{\overline{A''B'}} \cdot \frac{\overline{B''A'}}{\overline{B''C'}} \cdot \frac{\overline{C''B'}}{\overline{C''A'}} = -\left(\frac{\overline{BA'}}{\overline{BC'}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{CA'}}\right) : \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} \cdot \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}\right),$$

sau încă, ştiind că înălţimile sunt concurente, prima paranteză are valoarea (-1), asemenea şi a doua, deci:

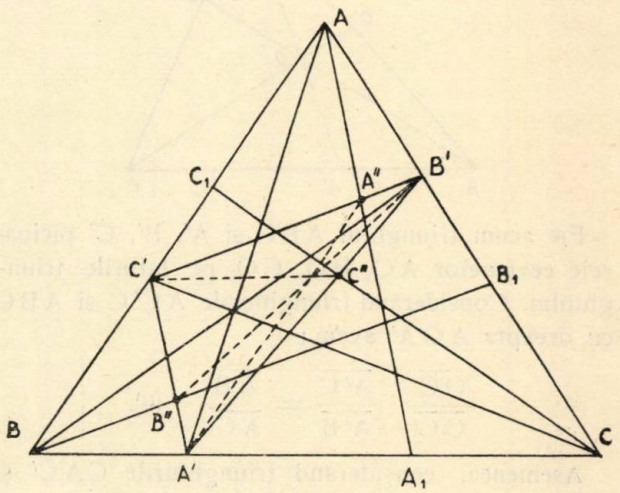
$$\frac{\overline{A''C'}}{\overline{A''B'}} \cdot \frac{\overline{B''A'}}{\overline{B''C'}} \cdot \frac{\overline{C''B'}}{\overline{C''A'}} = -1,$$

de unde rezultă proprietatea enunţată.

Observare importantă. In demonstrarea proprietăţii de mai sus, am utilizat faptul că medianele deoparte şi înălţimile în triunghiul ABC sunt triple de ceviene concurente în acelaşi punct. Demonstraţia subzistă deci în cazul general a două triple de ceviene concurente oarecare.

Putem deci enunţa proprietatea generală următoare:

Intr'un triunghiu oarecare trei ceviene concurente determină pe laturile unui triunghiu, determinat de picioarele altor trei ceviene concurente, respectiv trei puncte care sunt picioarele a trei ceviene concurente în acest ultim triunghiu.



Scriind relaţia (17') şi analoagele ei, obţinem ca în cazul particular precedent relaţiunea:

$$\frac{\overline{A''C'}}{\overline{A''B'}} \cdot \frac{\overline{B''A'}}{\overline{B''C'}} \cdot \frac{\overline{C''B'}}{\overline{C''A'}} = -1.$$

Proprietatea precedentă este în strânsă legătură cu următoarea: *Dacă* $A_1B_1C_1$ *este un triunghiu înscris în triunghiul* ABC *şi omologic cu el, iar* $A_2B_2C_2$ *înscris în* $A_1B_1C_1$ *şi omologic cu el, triunghiul* $A_2B_2C_2$ *este omologic cu triunghiul* ABC.

Fie A′, B′, C′ picioarele cevienelor AA_2, BB_2, CC_2 în triunghiul ABC. Aplicând relaţiunea (R) în unghiurile BAC, ABC, BCA cu transversalele AA′, BB′, CC′ respectiv, avem relaţiunea:

$$\frac{\overline{A_2B_1}}{\overline{A_2C_1}} : \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC_1}} : \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

şi analoagele ei, pe care înmulţindu-le şi ţinând seama că triplele de ceviene (AA_1, BB_1, CC_1) şi (A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2) sunt concurente, găsim:

$$(-1) : \left(\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} \right) = (-1) : (-1),$$

sau încă:

$$\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = -1,$$

de unde rezultă proprietatea enunţată. (Vezi G. M., vol, XXXIV, pag. 229—231.)

11. Ne oprim aci cu aplicaţiunile interesante ale teoremei noastre şi reciprocei ei; cele arătate până aci socotim că justifică permisiunea pe care ne-am luat-o de-a o numi importantă.

Ca încheiere a articolului de faţă observăm că teorema noastră poate fi enunţată şi subt forma următoare:

Dacă un segment variabil rămâne înscris într'un unghiu fix, raportul dintre raportul determinat pe el de o dreaptă fixă trecând prin vârful unghiului şi acela al segmentelor determinate de el pe laturile unghiului, ESTE CONSTANT.

Această proprietate a fost dată de noi cu zece ani în urmă ca problemă propusă în revista „*Gazeta Matematică*“ subt numărul 3755. Vom publica acolo soluţiunile primite până la această dată dela corespondenţii *G. M.*

NOTE MATEMATICE

1. — *Résolution en nombres entiers du système diophantien:*

$$\begin{cases} x^2 + a\,x\,y = u^k & (1) \\ x^2 + b\,x\,z = v^l & (2) \end{cases}$$

a et b représentant des entiers donnés.

Solution. Nous avons pour l'équation (1):

$$x = m^k,$$

k pair
$$\begin{cases} y = C_{k,1}\,m^{k-1}\,n + C_{k,2}\,a\,m^{k-2}\,n^2 + \cdots \\ \quad + C_{k,\frac{k}{2}}\,a^{\frac{k}{2}-1}\,m^{\frac{k}{2}}\,n^{\frac{k}{2}} + \cdots C_{k,1}\,a^{k-2}\,m\,n^{k-1} \\ \quad + a^{k-1}\,n^k. \end{cases}$$

k impair
$$\begin{cases} y = {}_{k,1}\,m^{k-1}\,n + C_{k,2}\,a\,m^{k-2}\,n^2 + \cdots \\ \quad + C_{k,\frac{k-1}{2}}\,a^{\frac{k-3}{2}}\,m^{\frac{k+1}{2}}\,n^{\frac{k-1}{2}} \\ \quad + C_{k,\frac{k-1}{2}}\,a^{\frac{k-1}{2}}\,m^{\frac{k-1}{2}}\,n^{\frac{k+1}{2}} + \cdots \\ \quad + C_{k,1}\,a^{k-2}\,m\,n^{k-1} + a^{k-1}\,n^k. \end{cases}$$

$$u = m^2 + a\,m\,n.$$

Pour l'équation (2) nous avons des expressions analogues pour les inconnues x, z, v qu'on écrira facilement d'aprés les précédentes en employant deux autres paramètres indépendants p et q. On aura ensuite $x = m^k = p^l$.

Nous distinguerons deux cas:

1. $k = l$. Il suffit de prendre $p = m$.

2. $k \neq l$. Soit μ le p. p. c. m. des deux exposants k et l; posons $\mu : k = k'$, $\mu : l = l'$, puis $m = r^{k'}$, $p = r^{l'}$.

En remplaçant m et p dans les expressions des inconnues en fonction de r, on aura une solution du système proposé en fonction des 3 paramètres arbitraires m, n, q, soit n, q, r.

Exemple. Nous avons explicité les formules pour le système

$$\begin{cases} x^2 + a\,x\,y = u^3 \\ x^2 + b\,x\,z = v^5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r^{15} \\ y = 3\,r^{10}\,n + 3\,a\,r^5\,n^2 + a^2\,n^3 \\ u = r^{10} + a\,r^5\,n \\ z = 5\,r^{12}\,q + 10\,b\,r^9\,q^2 + 10\,b^2\,r^6\,q^3 \\ \quad + 5\,b^3\,r^3\,q^4 + b^4\,q^5. \\ v = r^6 + b\,r^3\,q. \end{cases}$$

Exemple numérique.

$$a = 2, \quad b = 3, \quad r = 1, \quad n = 3, \quad q = 2.$$

$$\begin{cases} 1^2 + 2 \cdot 171 = 7^3 \\ 1^2 + 3 \cdot 5602 = 7^5. \end{cases}$$

Remarquons que c'est une solution numérique de

$$\begin{cases} x^2 + 2\,x\,y = u^3 \\ x^2 + 3\,x\,z = u^5. \end{cases}$$

A. GLODEN

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLIII, No. 6, Februarie 1938. † *Gh. Em. Filipescu*, de *Ion Ionescu*. Primele aritmetici pentru Bucovina (urmare şi sfârşit), de *Victor Marian*. Asupra unor patrate curioase, de *V. Thébault*. Asupra punctelor lui *Feuerbach*, de *M. C. Postelnicescu*. Concursul „*Gazetei Matematice*". Note. Probleme rezolvate şi propuse.

2. *Bulletin Mathématique* de la Société Roumaine des Sciences, t. 39, 1937. Eine verallgemeinerung des *Pompeiu*schen Dreiecksatzes, von *D. Barbilian*. Sur la représentation en suite des fonctions polyharmoniques du produit de deux fonctions analytiques, par *Nicolas Ciorănescu*. Fonctions harmoniques bornées dans un demi-plan ou dans un angle, par *Miron Nicolesco*. Sur une propriété projective différentielle caractéristique à la surface de *Veronese*, par *Al. Pantazi*. Sur les propriétés asymtotiquements de mouvement régis par certains types de chaînes simples, par *W. Doeblin*.

3. *Mathematica*, vol. XIII, 1937, Cluj. Sur une équation fonctionnelle, par *Paul Montel*. Les fonctions quasi-analytiques dans l'espace fonctionnel, par *Stefan Mazurkiewicz*. Sur l'univalence de certaines classes de fonctions, par *Lubomir Tchakaloff*. Sur l'équation trinôme, par *S. Dobrzycki*. Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions sommables, par *B. Vulich*. Sur un problème de la théorie des relations, par *Sophie Piccard*. Un critère de distanciabilité, par *Georges Kurepa*. Sur la notion de chaîne et l'idée de loi naturelle, par *Octav Onicescu*. Sur la primitivé des corps *P*-Adiques, par *M. Krasner*. Sur une propriété qui caractérise la transformation conforme, par *Th. Anghelutza*. Equation de *M. Volterra* qui admettent des intégrales dépendat d'une fonction arbitraire, par *C. Popovici*. Intégration des équations différentielle fonctionnelles, par *C. Popovici*. Remarques sur le maximum d'un déterminant dans tous les éléments sont non négatifs, par *Tiberiu Popoviciu*. Les invariants de deux équations aux différentielles totales de classe six, par *G. Vrănceanu*. Queques difficultés dans l'application pratique de la théorie des erreurs, par *M. Brelot*. Sur la mesure de *Banach* des ensembles linéaires des puissance $< 2^{N_0}$, par *W. Sierpinski*. Sur le trapèze rectangle, par *Georges Bratu*. Remarque sur une équation fonctionelle, par *W. Sierpinski*. *Paul Montel*, membre de l'institut, par *D. Pompeiu*.

4. *Boletin Matematico*, Anul X, No. 12, 1938, Buenos Aires. Asupra convergenţei unor integrale impropri, de *O. Gonzales*. O teoremă asupra ecuaţiilor algebrice, de *A. Gloden*. Probleme rezolvate şi propuse.

5. *Boletin Matematico*, Anul X, No. 13, 1938, Buenos Aires. Serii teyloriene în raport cu numerile prime, de *M. Petrovich*. Asupra triunghiurilor pitagorice (conclusiuni), de *R. Noguera*. Formulele lui *Girard* şi nu a lui *Newton*, de *P. Cattaneo*. Probleme propuse.

6. *Stiinţă şi Progres*, revista ştiinţifică a liceelor Militare, anul IV, No. 9, 1938. Pentru cei plecaţi dintre noi, de *A. Viciu*. Asupra triunghiului podar, de *N. N. Mihăileanu*. Cutremurele de pământ, de Căp. *Al. Ionescu Pelican*. Ce este Ionosfera, de elev *Centea Zeno*. Publicaţii noui. Probleme rezolvate şi propuse.

7. *Ciel et Terre*, Bulletin mensuel de la Société Belge d'Astronomie, de Météorologie et de Physique du Globe. Note asupra problemei înghetului nocturn, de *L. Dufour*. O remarcabilă descoperire: asteroida Hermès (1937), par *S. Arend*. Efemeride astronomice.

8. *Buletin*, Revista cercului de studii şi a asociaţiei absolvenţilor şcoalei superioare P. T. T., Timişoara, anul VII, No. 2 Normele de salarizare, de Inginer *Ion C. Schileru*. Studiul echilibrului şi a tensiunilor într'un fir metalic, de Ing. Insp. General *Ion C. Schileru*.

9. *Caïus Jacob*. Sur le calcul approché du coefficient de contraction d'un jet gazeux. (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 27 Décembre, 1937)

PROBLEME REZOLVATE

1279. — *Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se stabilească relaţia*:[1]

$$\sqrt{8p^6 - 3p^4(4R + r)^2 + (\Sigma r_a^2)^3} = p^3 \begin{vmatrix} \operatorname{tg}\frac{A}{2} & \operatorname{tg}\frac{B}{2} & \operatorname{tg}\frac{C}{2} \\ \operatorname{tg}\frac{B}{2} & \operatorname{tg}\frac{C}{2} & \operatorname{tg}\frac{A}{2} \\ \operatorname{tg}\frac{C}{2} & \operatorname{tg}\frac{A}{2} & \operatorname{tg}\frac{B}{2} \end{vmatrix}.$$

SUB-LT A. I. STAN

Dacă ţinem seamă de proprietăţile determinanţilor şi de relaţiile cunoscute:

$$(1)\quad r_a = p\operatorname{tg}\frac{A}{2},\quad r_b = p\operatorname{tg}\frac{B}{2},\quad r_c = p\operatorname{tg}\frac{C}{2};$$

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r;\quad r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2;$$

$$\sum \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} = 1,$$

putem scri succesiv:

$$(2)\quad p^3 \begin{vmatrix} \operatorname{tg}\frac{A}{2} & \operatorname{tg}\frac{B}{2} & \operatorname{tg}\frac{C}{2} \\ \operatorname{tg}\frac{B}{2} & \operatorname{tg}\frac{C}{2} & \operatorname{tg}\frac{A}{2} \\ \operatorname{tg}\frac{C}{2} & \operatorname{tg}\frac{A}{2} & \operatorname{tg}\frac{B}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_a & r_b & r_c \\ r_b & r_c & r_a \\ r_c & r_a & r_b \end{vmatrix}$$

$$= 3r_a r_b r_c - (r_a^3 + r_b^3 + r_c^3)$$

$$= (r_a + r_b + r_c)(r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a - r_a^2 - r_b^2 - r_c^2)$$

$$= (r_a + r_b + r_c)[3(r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a) - (r_a + r_b + r_c)^2]$$

$$= (4R + r)[3p^2 - (4R + r)^2].$$

De altă parte avem succesiv:

$$8p^6 - 3p^4(4R+r)^2 + (\Sigma r_a^2)^3 = 8p^6 - 3p^4(4R+r)^2$$
$$+ [(r_a+r_b+r_c)^2 - 2(r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a)]^3$$
$$= 8p^6 - 3p^4(4R+r)^2 + [(4R+r)^2 - 2p^2]^3$$
$$= 8p^6 - 3p^4(4R+r)^2 + (4R+r)^6 - 6p^2(4R+r)^4$$
$$12p^4(4R+r)^2 - 8p^6$$
$$= (4R+r)^2[(4R+r)^4 - 6p^2(4R+r)^2 + 9p^4]$$
$$(4R+r)^2[3p^2 - (4R+r)^2]^2.$$

Extrăgând rădăcina din ambii membrii obţinem:

$$(3) \qquad \sqrt{8p^6 - 3p^4(4R+r)^2 + (\Sigma r_a^2)^3} =$$
$$(4R+r)[3p^2 - (4R+r)^2].$$

Comparând relaţiile (2) şi (3), care au membrii al 2-lea egali, deducem:

$$\sqrt{8p^6 - 3p^4(4R+r)^2 + (\Sigma r_a^2)^3} = p^3 \begin{vmatrix} \operatorname{tg}\frac{A}{2} & \operatorname{tg}\frac{B}{2} & \operatorname{tg}\frac{C}{2} \\ \operatorname{tg}\frac{B}{2} & \operatorname{tg}\frac{C}{2} & \operatorname{tg}\frac{A}{2} \\ \operatorname{tg}\frac{C}{2} & \operatorname{tg}\frac{A}{2} & \operatorname{tg}\frac{B}{2} \end{vmatrix}.$$

Relaţia cerută este astfel stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (lic. Buzeşti, Craiova), *Deceanu Gheorghe* (lic. Milit, Tg-Mureş), *Dobrescu Paul* (lic. Milit, N. Filipescu) şi *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila).

Soluţia dată de autor. Ridicăm la patrat relaţia din enunţ, având în vedere regula de ridicarea la patrat a unui determinant şi avem:

$$8p^6 - 3p^4(4R+r)^2 + (\Sigma r_a^2)^2$$
$$= p^6 \begin{vmatrix} \sum \operatorname{tg}^2\frac{A}{2} & \sum \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} & \sum \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} \\ \sum \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} & \sum \operatorname{tg}^2\frac{A}{2} & \sum \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} \\ \sum \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} & \sum \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} & \sum \operatorname{tg}^2\frac{A}{2} \end{vmatrix}.$$

Rămâne să stabilim această relaţie. Insemnând cu D membrul al 2-lea, ţinând seamă de relaţia cunoscută,

$$\sum \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} = 1,$$

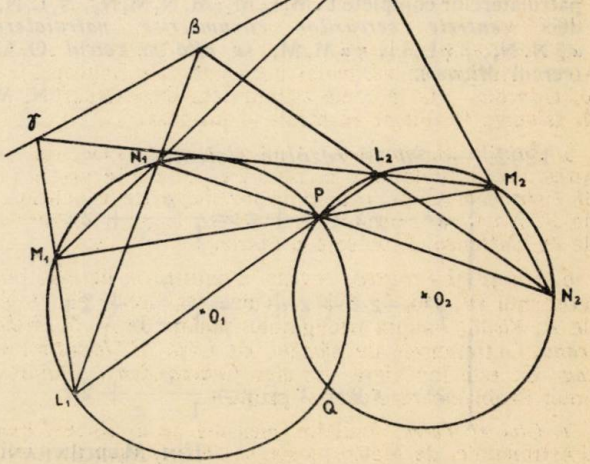
precum şi de relaţiile (1) de la prima soluţie, putem scri succesiv:

$$D = p^6 \begin{vmatrix} \sum \operatorname{tg}^2\frac{A}{2} & 1 & 1 \\ 1 & \sum \operatorname{tg}^2\frac{A}{2} & 1 \\ 1 & 1 & \sum \operatorname{tg}^2\frac{A}{2} \end{vmatrix}$$
$$= p^6\left[\left(\sum \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\right)^3 + 2 - 3\sum \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\right] =$$
$$\left(\sum p^2 \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\right)^3 + 2p^6 - 3p^4 \sum p^2 \operatorname{tg}^2\frac{A}{2} =$$
$$= (\Sigma r_a^2)^3 + 2p^6 - 3p^4(r_a^2 + r_b^2 + r_c^2) =$$
$$(\Sigma r_a^2)^3 + 2p^6 - 3p^4[(r_a+r_b+r_c)^2$$
$$- 2(r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a)] =$$
$$(\Sigma r_a^2)^3 + 2p^6 - 3p^4[(4R+r)^2 - 2p^2] =$$
$$8p^6 - 3p^4(4R+r)^2 + (\Sigma r_a^2)^3.$$

Astfel relaţia (4), deci şi cea din enunţ este stabilită.

1282. — *Prin punctul* P *de intersecţie a două cercuri secante* O_1 *şi* O_2 *se duce trei secante* L_1L_2, M_1M_2 *şi* N_1N_2 *comune celor două cercuri. Să se arate că punctele* α, β *şi* γ *de intersecţie ale dreptelor* (M_1N_1, M_2N_2), (N_1L_1, N_2L_2) *şi* (L_1M_1, L_2M_2) *sunt colineare.*

TEOFIL VESCAN



1°. *Soluţie* dată de d-nii *Loziciu D. Ilie* (student, Cluj) şi *M. I. Vlad.* Vom demonstra mai

întâi, că patrulaterul $L_1 L_2 \beta\gamma$ este inscriptibil; pentru aceasta, se observă egalitatea unghiurilor

$$\beta L_1 \gamma = M_1 L_1 N_1 = M_1 P N_1 = M_2 P N_2 = M_2 L_2 N_2 = \beta L_2 \gamma;$$

analog sunt inscriptibile patrulaterele $M_1 M_2 \alpha\gamma$ și $N_1 N_2 \alpha\beta$, atunci unghiurile $\gamma\beta L_2$ și $\alpha\beta L_2$ sunt suplimentare ori egale cu $\gamma L_1 L_2$ și $\alpha N_1 N_2$, egale ele însile din cauza patrulaterului înscris $L_1 M_1 N_1 P$; deci unghiurile $\gamma\beta L_2$ și $\alpha\beta L_2$ sunt suplimentare, deci α, β, γ colineare.

2°. *A doua soluție.* Triunghiurile $L_1 M_1 N_2$ și $L_2 M_2 N_2$ sunt omologice, fiindcă $L_1 L_2$, $M_1 M_2$, $N_1 N_2$ se întâlnesc în P, deci, conform teoremei *Desargues*, laturele corespunzătoare se întâlnesc în puncte colineare, îndependent de faptul că L, M, N mai sunt și pe cercuri.

Au soluționat astfel problema, d nii: *Apostol Radu* (lic. Milit, N. Filipescu), *Budeanu Constantin* (elev inginer), *Mihalcea I. O.* (Buzău), *Postelnicescu C. M* (lic. Milit., N. Filipescu), *Predoescu I. Marin* (Șc. Politechnică, Timiș ara).

D-nii *Milea G. E.* (Su -Lt), *Popa Nicolae* (Beiuș), *Sâmbotin Gh.* (Sub-Lt), *Săvulescu Spirea* (Șc. Politechnică, București), aplicând succesiv teorema *Menelaus* au regăsit propoz ția triunghiurilor omologice.

Observații. Soluția 1°, continuată, conduce și la alte proprietăți ale figurii. Fie Q al doilea punct de intersecție al cercurilor O_1, O_2; unghiul $M_1 \alpha M_2$ are ca supliment, unghiurile $N_1 M_1 P$ și $\alpha M_2 P$ care sunt egale respectiv cu $N_1 Q P$ și $P Q N_2$, deci unghiurile $M_1 N_1 \alpha M_1 N_2$ și $N_1 Q N_2$ sunt suplimentare, deci *cercurile* $\alpha\beta N_1 N_2$, $\beta\gamma L_1 L_2$, $\gamma\alpha M_1 M_2$ *se retaie în* Q, pe de altă parte, unghiurile $L_1 Q L_2$, $M_1 Q M_2$, $N_1 Q N_2$ sunt egale cu $O_1 Q O_2$, deci *unghiurile* α, β γ *sunt egale cu unghiul sub care se taie cercurile* O_1, O_2. Q este un punct *Miquel* comun al patrulaterelor complete $L_1 M_1 L_2 M_2$, $M_1 N_1 M_2 N_2$, $N_1 L_1 N_2 L_2$; deci *centrele cercurilor circumscrise patrulaterelor* $\alpha\beta N_1 N_2$, $\beta\gamma L_1 L_2$, $\gamma\alpha M_1 M_2$ *se află pe cercul* $O_1 Q O_2$ (cercul *Miquel*).

N. M.

1292. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x^2 - yz + y + z = \dfrac{a}{1-x} + 2x \\ y^2 - zx + z + x = \dfrac{b}{1-y} + 2y \\ z^2 - xy + x + y = \dfrac{c}{1-z} + 2z \end{cases}$$

ION MARGINEANU

Prima ecuație se mai poate scri,

$$(x-1)^2 - (1-y)(1-z) = \frac{a}{1-x},$$

sau:

$$(1-x)^3 - (1-x)(1-y)(1-z) = a.$$

Analog transformăm și celelalte două ecuații, astfel că sistemul dat este echivalent cu următorul sistem:

$$(1) \quad \begin{cases} (1-x)^3 - (1-x)(1-y)(1-z) = a \\ (1-y)^3 - (1-x)(1-y)(1-z) = b \\ (1-z)^3 - (1-x)(1-y)(1-z) = c. \end{cases}$$

Dacă facem substituția:

$$(2) \quad 1-x = u, \qquad 1-y = v, \qquad 1-z = w,$$

sistemul (1) devine:

$$(3) \quad \begin{cases} u^3 = a + uvw \\ v^3 = b + uvw \\ w^3 = c + uvw \end{cases}$$

Multiplicând aceste ecuații și notând,

$$(4) \quad uvw = t,$$

obținem:

$$t^3 = (a+t)(b+t)(c+t).$$

Dezvoltând și simplificând această ecuație, avem:

$$(5) \quad (a+b+c)t^2 + (ab+bc+ca)t + abc = 0.$$

De aci urmează:

$$t = \frac{-(ab+bc+ca) \pm \sqrt{(ab+bc+ca)^2 - 4abc(a+b+c)}}{2(a+b+c)}.$$

adică:

$$(5') \quad \begin{cases} t_1 = A_1 \\ t_2 = A_2, \end{cases}$$

unde A_1 și A_2 sunt cele două valori cunoscute ale t.

Înlocuind aceste valori ale lui t în (4) și apoi în (3), avem:

$$\begin{cases} u^3 = a + A_m \\ v^3 = b + A_m \\ w^3 = c + A_m. \end{cases} \qquad (m = 1, 2)$$

Rezolvim aceste ecuații binoame de gradul al 3-lea și ținem seamă de rădăcinele cubice ale unității,

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 2k\pi + i \sin k\pi} = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}$$

$$(k = 0, 1, 2),$$

care sunt,

$$1,\qquad \alpha=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\quad \alpha^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$(i=\sqrt{-1}).$$

Astfel sistemul (6) rezolvit ne dă:

$$(6')\quad \begin{cases} u_1=\sqrt[3]{a+A_m},\ u_2=\alpha\sqrt[3]{a+A_m},\ u_3=\alpha^2\sqrt[3]{a+A_m} \\ v_1=\sqrt[3]{b+A_m},\ v_2=\alpha\sqrt[3]{b+A_m},\ v_3=\alpha^2\sqrt[3]{b+A_m} \\ w_1=\sqrt[3]{c+A_m},\ w_2=\alpha\sqrt[3]{c+A_m},\ w_3=\alpha^2\sqrt[3]{c+A_m} \end{cases}$$

$$(m=1,\ 2).$$

Inlocuind aceste valori obţinute pentru u, v, w, în relaţiile (2), deducem:

$$(7)\quad \begin{cases} x_1=1-\sqrt[3]{a+A_m},\quad x_2=1-\alpha\sqrt[3]{a+A_m}, \\ y_1=1-\sqrt[3]{b+A_m},\quad y_2=1-\alpha\sqrt[3]{b+A_m}, \\ z_1=1-\sqrt{c+A_m},\quad z_2=1-\alpha\sqrt{c+A_m}, \\ x_3=1-\alpha^2\sqrt[3]{a+A_m} \\ y_3=1-\alpha^2\sqrt[3]{b+A_m} \qquad (m=1,\ 2). \\ z_3=1-\alpha^2\sqrt[3]{c+A_m} \end{cases}$$

Orice combinaţie (x, y, z) dintre aceste valori (7), ne dă un sistem de soluţii pentru sistemul dat.

Soluţii date de d-nii: *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş), *Popa Nicolae* (lic. Beiuş) şi *Popoviciu I. Gavril.*

1388. — *Să se găsească condiţia dintre coeficienţii unei ecuaţii de gradul al 3-lea pentru ca rădăcinele ei să formeze o proporţie armonică şi apoi să se rezolve ecuaţia.*

ION RIZESCU

Fie ecuaţia de gradul al 3-lea generală:

$$(1)\qquad a x^3+b x^2+c x+d=0.$$

Pentru ca rădăcinele x_1, x_2, x_3 a acestei ecuaţii să formeze o proporţie armonică, trebuie să avem:

$$\frac{2}{x_1}=\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3},$$

sau:

$$(2)\qquad 2x_2x_3=x_1x_2+x_1x_3.$$

De altă parte între rădăcini şi coeficienţii ecuaţiei (1) există relaţiile:

$$(3)\quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

A 2-a relaţie din (3) se mai poate scri, ţinând seamă de (2):

$$x_2x_3+2x_2x_3=\frac{c}{a},$$

de unde:

$$(4)\qquad x_2x_3=\frac{c}{3a}.$$

Impărţind a 3-a ecuaţie din (3) prin relaţia (4),

$$(5)\qquad x_1=-\frac{3d}{c},$$

Inlocuind în (2) valoarea lui x_2x_3 din (4) şi valoarea lui x_1 din (5), obţinem:

$$\frac{2c}{3a}=-\frac{3d}{c}(x_2+x_3).$$

De aci deducem:

$$(6)\qquad x_2+x_3=-\frac{2c^2}{9ad}.$$

Dacă acum înlocuim în prima relaţie din (3) pe x_1 din (5) şi x_2+x_3 din (6), avem condiţia:

$$-\frac{3d}{c}-\frac{2c^2}{9ad}=-\frac{b}{a},$$

sau:

$$(7)\qquad 2c^3+27ad^2-9bcd=0.$$

Aceasta este condiţia pe care trebuie să o îndeplinească coeficienţii ecuaţiei de gradul al 3-lea (1) pentru ca rădăcinele ei să formeze o proporţie armonică.

Pentru rezolvarea ecuaţiei (1), presupunând condiţia (7) împlinită, observăm că:

$$x_1=-\frac{3d}{c},\qquad \text{relaţia (5),}$$

iar pentru a găsi pe x_2 şi x_3, considerăm relaţiile găsite (6) şi (4),

$$x_2+x_3=-\frac{2c^2}{9ad},\qquad x_2x_3=\frac{c}{3a},$$

care ne conduc la ecuaţia:

$$z^2+\frac{2c^2}{9ad}z+\frac{c}{3a}=0,$$

sau:

$$9\,a\,d\,z^2 + 2\,c^2 z + 3\,c\,d = 0.$$

Rezolvind această ecuaţie, avem:

$$x_2,\ x_3 = \frac{-c^2 + \sqrt{c^4 - 27\,a\,c\,d^2}}{9\,a\,d}.$$

Soluţii date de d-nii: *Amăreşteanu F. Marcel* (Craiova), *Baumgarteu I. Iosif*, *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Ofiţeri de Artilerie), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Rajka Z.* (lic Orăstie) şi *Ştefănescu D. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu).

1570. — *Să se găsească un patrat perfect de patru cifre, astfel că dacă se schimbă cele două cifre din dreapta, între ele, numărul obţinut este un cub.*

V. THÉBAULT

Problema aceasta este tot una cu problema 3392 propusă în „*Gazeta Matematică*“ de d-l G l *Gh. Buicliu* şi rezolvată la pag. 473, Vol XXXI al acelei reviste.

Enunţul problemei 3392 din „G. M.“ este:

Să se găsească un patrat perfect de patru cifre, ştiind că dacă i se schimbă între ele ultimele 2 cifre, se obţine un cub perfect.

S-a găsit soluţiunea:

$$96^2 = 9216;\qquad 21^3 = 9261.$$

Notă. Au rezolvat bine problema 1570, independent de cunoaşterea problemei d-lui G-l *Gh. Buiclíu*, d-nii: *Aman V. C-tin* (Şc. Polit.. Timişoara), *Berinde L. Titus* (Şc. Polit., Timişoara), *Cristescu Dan*, *Grigor N. Ioan*, *Kornis Ernest* (lic. Loga, Timişoara), *Medeleanu Ion* (bacalaureat), *Murgu V. Marţian* (Şc. Polit., Timişoara), *Reicher Herman* (lic. Internat, Iaşi) şi *Tilică C. Ştefan* (li·. T-Severin).

PROBLEME PROPUSE

1658. — Să se găsească valorile generale ale lui n pentru care $n^2 - 5$ se divide prin 76.

G L GH. BUICLIU

1659. — Care este patratul de cinci cifre a cărui grupă de trei cifre de la dreapta este patratul numărului obţinut inversând cifrele grupei de două cifre de la stânga?

A. GLODEN

1660. — Să se construiască un triunghiu oarecare ABC cunoscându-i triunghiul antimedial $S_a\,S_b\,S_c$ al triunghiului ortic $H_a\,H_b\,H_c$.

EMANUEL I. SARULESTEANU

1661. — Prin vârful A al triunghiului ABC, se duc două cercuri tangente, unul în B, celalt în C, la latura BC. Fie I intersecţia celor două cercuri şi B′, C′ punctele unde dreptele BI şi CI tae respectiv laturile AC şi AB.

Să se demonstreze că:

1°. Patrulaterul AB′IC′ este inscriptibil.

2°. Cercul AB′IC′ este tangent în A la cercul ABC.

3°. Dreapta AI este mediana triunghiului AB′C′.

LOCOT. I. GH. ZAMFIRESCU

1662. — Să se arate că rădăcinele ecuaţiei

$$\begin{vmatrix} x^n & x^{n-1} & x^{n-2} & x^{n-3} & \dots & x \\ C_n^2 & C_{n-1}^1 - n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_n^3 & C_{n-1}^2 & C_{n-2}^1 - n & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_n^n & C_{n-1}^{n-1} & C_{n-2}^{n-2} & C_{n-3}^{n-3} & & C_n^1 - n \end{vmatrix} = 0,$$

sunt $x = 0,\ -1,\ -2, \dots -(n-1)$

VASILE VASU

1663. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{zx} = -\dfrac{7}{12} \\ xy + yz + zx = 0 \\ \dfrac{1}{x^3y^3} + \dfrac{1}{y^3z^3} + \dfrac{1}{z^3x^3} = -\dfrac{235}{1728} \end{cases}$$

SUB-LT M. GRUMAZESCU

1664. — Să se arate că în orice triunghiu avem relaţia,

$$c = \frac{a + b\,(\sin C - \cos C)}{\sin B + \cos B},$$

notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

V. ALACI

1665. — Să se stabilească relaţiile:

$$\cos A + \cos B = \frac{r_c\,(h_c - r)}{R\,h_c} = \frac{r\,(h_c + r_c)}{R\,h_c}$$

$$\sin A + \sin B = \frac{s\,(h_c + r_c)}{R\,h_c\,r_c} = \frac{p\,(h_c - r)}{R\,h_c},$$

notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

MIREL D. STOENESCU

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Aman V. C-tin (P., 1596, 1598, 1611); *Andrievici N.* (P., 1389, 1413, 1414, 1592 1638, 1647, 1648); *Bârlea G. Victor* (1611); *Buznea D. Dinu* (1638, 1640, 1648); *Cernat Camil* (1625); *Constantinescu C. Vasile* (1597, 1613, 1638), *Cristescu Dan* (1597, 1614, 1618, 1637, 1638, 1638, 1648), *Dăscălescu Şt. Hristache* (1555, 1559, 1643), *Diaconescu D. Ion* (1567, 1569, 1574, 1583, 1584, 1585, 1592, 1593, 1601, 1616, 1638, 1640, 1647); *Diaconescu Marcel* (1580, 1597, 1598, 1601, 1603, 1608, 1614, 1616, 1617, 1625, 1631, 1648); *Grigor N. Ioan* (1590, 1597, 1603, 1611, 1649, 1650); *Jidanu I. C-tin* (1623, 1630, 1635, 1638, 1650); *Matei Augustin* (P.); *Marcuzon L.* (1574, 1597); *Mihăileanu C. Andrei* (1597, 1611, 1650, 1652); *Modâlca S. Emil* (1037, 1494, 1569, 1574, 1584, 1585, 1601, 1603, 1608, 1611, 1614, 1623, 1625, 1626, 1638, 1647); *Papadopol D. Elena* (1587), *Pasere Emil* (1597, 1598, 1616); *Popescu Adrian* (N., 1469, 1560, 1562, 1565, 1585, 1591, 1620, 1625, 1643, 1647); *Popoviciu Gabriel* (1556, 1597, 1598, 1599, 1611, 1620, 1625, 1629, 1630, 1634, 1638, 1643); *Popoviciu Mircea* (1585, 1595, 1608, 1650); *Porumbescu T. D-tru* (1574, 1614, 1638); *Reicher L. Herman* (1574, 1590, 1593, 1607, 1614, 1617, 1623, 1631, 1634, 1638); *Staicu I. N.* (1580, 1599, 1611, 1626, 1638, 1647, 1648); *Ştefănescu Marin* (1649, 1650, 1654, 1656, 1657); *Stoenescu D. Mirel* (1567, 1638); *Tilica C. Ştefan* (N., 1474, 1489, 1558, 1561, 1563, 1564, 1567, 1569, 1587, 1593, 1597, 1607, 1608, 1610, 1618, 1622, 1626, 1629, 1631, 1633, 1634, 1635, 1636, 1638, 1640, 1649, 1650, 1652, 1654, 1656, 1657); *Vijelie Gh. Eugen* (1630); *Vlad C. M.* (P.)

INFORMAŢIUNI

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO·

ANUL AL XI-LEA

care a început în Martie 1938.

Costul *special* a unui abonament este de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Abonamentele se pot face la Redacţia „R. M. T."

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecţia R. M. T., anul XV, în volum şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS :
1 an : Belgique, **30 fr.** France, **25** fr.
Etranger, 7 **belgas**

Administration :
SPHINX, Bruxelles 173, Avenue Longchamp

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Rugăm pe corespondenţii nostrii, a ne trimete de urgenţă costul abonamentului de 100 (una sută) lei, pentru „R. M. T." pe anul XVIII, care a început la 15 Martie 1938.

ANUL XVIII. 15 APRILIE 1938 No. 2.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **N. N. MIHAILEANU**: ASUPRA CERCURILOR APOLLONIUS.
2. NOTE MATEMATICE: 2, 3.
3 BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 42 1274, 1294, 1297, 1398
5. PROBLEME PROPUSE: 1666-1673.
6. INFORMATIUNI

TIMISOARA

Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu,** Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVII inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XVIII — No. 2 TIMISOARA, 15 APRILIE 1938

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

ASUPRA CERCURILOR APOLLONIUS

DE N. N. MIHAILEANU

Pe latura BC a triunghiului ABC, se consideră două puncte conjugate armonic M și M' și fie și α mijlocul segmentului MM'; cum $\alpha B \cdot \alpha C = \overline{\alpha M}^2$, rezultă că *cercul* (α) *de diametru* MM', este *ortogonal cercului* (O) *de centru* O, *circumscris triunghiului* ABC (propoziție cunoscută).

O, având aceeaș putere față de toate cercurile fascicolului (α), când α variază pe BC, axa fascicolului va fi mediatoarea segmentului BC; punctele limită sunt B și C și fascicolul conjugat va fi format din totalitatea cercurilor trecând prin B și C.

Fie W arbitrar pe cercul (α); razele WM, WM' perpendiculare și conjugate razelor WB, WC, *sunt bisectoarele unghiului format de ele;* deci *distanțele lui* W *la* B *și* C, *stau într'un raport constant, egal cu* $MB : MC$; în particular, fie U și U' intersecțiile cercului (α) cu cercul (O), UM, $U'M'$ *respectiv* UM', $U'M$ *se întâlnesc în mijloacele* A_1, A_2 *ale arcelor* BC *ale cercului* (O), deci *pentru toate cercurile fascicolului* (α), $UM, \ldots$ *trec printr'un punct fix.*

αW este tangentă cercului (O), căci $\alpha B \cdot \alpha C = \overline{\alpha M}^2 = \overline{\alpha W}^2$, în particular, αU, $\alpha U'$ sunt tangente sau UU' *este polara* lui α; rezultă că *pentru familia de cercuri* (α), *coardele comune cu cercul circumscris trec printr'un punct fix* V, *pe mediatoarea* A_1A_2, *polul laturei* BC; înglobând și cercurile de rază nulă în fascicol și cercul cu M confundat în mijlocul BC, deci redus la mediatoare, avem

$$VU \cdot VU' = \cdots = \text{constant} = VA_1 \cdot VA_2 = \overline{VB}^2 = \overline{VC}^2.$$

*
* *

Fie în particular, M, M' picioarele bisectoarelor, cercul (α) devine cercul *Apollonius* corespunzător vârfului A, deci în baza precedentelor: *cercul* A *este ortogonal cercului circumscris: cercul* A *este locul geometric al punctelor ale căror distanțe la* B, C *stau în raport fix* $MB : MC = AB : AC$ pentru M în piciorul bisectoarei, deci cercul trece și prin vârful A; fie $U \equiv A$, *mijlocul* MM' *este pe tangenta în* A *la cercul* (O); AV este simediana triunghiului, deci *cercul* A *taie cercul circumscris după simediane.*

*
* *

Să considerăm trei cercuri (α), (β), (γ) descrise ca diametre pe trei perechi de puncte conjugate M, M', N, N'; P, P' pe laturele BC, CA, AB; *cercurile* (α), (β), (γ) *au centrul radical în punctul* O.

Dacă însă α, β, γ mai sunt și colineare, ele vor avea o axă radicală comună. *Deci dacă o dreaptă* Δ, *taie laturile unui triunghiu în* α, β, γ, *cercurile de centru* α, β, γ, *ortogonale lui* (O), *fac parte dintr'un fascicol, cu axa perpendiculară din* O *pe* Δ; *axele radicale respective ale cercurilor* (α), (β), (γ) *cu cercul* (O); *se întâlnesc pe axa comună* — propoziție evident valabilă și pentru un poligon înscris. Dar,

$$\alpha B : \alpha C = (MB : MC)^2 = (M'B : M'C)^2 \text{ etc.},$$

deci condiția ca α, β, γ să fie colineare, este echivalentă cu condiția cu M, N, P ori M', N', P' să fie colineare, ori picioare de ceviene concurente, ceeace este tot una, căci M, N, P fiind picioare de ceviene concurente, conjugatele lor M', N', P' sunt colineare și invers; fie deci M, N, P picioarele cevienelor unui punct I, $M'N'P'$ polara lui trilineară. Deci: *dacă* M, M'; N, N'; P, P' *împart laturile unui triunghiu în raportele* $z : y$, $x : z$, $y : x$ *cercurile de diametre* MM', NN', PP' *fac parte dintr'un fascicol cu axa trecând prin centrul*

cercului circumscris triunghiului [Gh. D. Simionescu, probl. 4709, G. M. XLIII—215, propoziție care a fost punctul de plecare pentru acest întreg studiu].

Să presupunem acuma că fascicolul (α), (β), (γ) este în situația de a avea două puncte comune, W, W' *deci conjugate față de* O, căci $OW.OW'$ egalează puterea centrului față de oricare din cercurile (α), (β), (γ) ortogonale, deci R^2 și *colineare cu intersecția* K *a axelor radicale respective ale celor trei cercuri cu cercul circumscris;* avem apoi

$$WB : WC = MB : MC = \text{aria } AMB : \text{aria } AMC = z : y, \text{ etc.},$$

deci *distanțele punctelor* W, W' *la vârfurile triunghiului sunt invers proporționale cu coordonatele baricentrice* x, y, z *ale punctului* I, pe de altă parte, W fiind un punct în planul triunghiului ABC de laturi a, b, c, mărimile $a.WA$, $b.WB$, $c.WC$ satisfac neegalităților $a.WA \leq b.WB + c.WC$ și analoagelor (egalitate când W este pe cercul circumscris; teorema *Ptolemeu*), deci condiția ca W, W' să fie reale este ca numerele $a:x$, $b:y$, $c:z$ să îndeplinească aceleași condiții (am regăsit rezultatul problemei 4709 căci m, n, p sunt invers proporționale cu x, y, z din modul cum sunt definite).

*
* *

Proprietățile cercurilor *Apollonius*, decurg prin particularizare: I este centrul cercului înscris, K punctul *Lemoine*, W, W' punctele A. există căci x, y, z sunt proporționale cu laturile, deci: *cercurile* A. *ale unui triunghiu, se întâlnesc în două puncte* W, W' *conjugate pe diametrul punctului Lemoine, perpendicular pe dreapta Lemoine și ale căror distanțe la vârfuri sunt invers proporționale cu laturile.*

*
* *

In planul cercului (O) de centru O, fie două puncte W, W' conjugate pe un diametru arbitrar și A un punct pe cerc; AW, AW' retaie cercul în D, D' atunci WD', W'D se vor întâlni într'un punt A' al cercului circumscris fiindcă intersecțiile (AD, A'D'), (AD', A'D) sunt conjugate. Figura este evident simetrică față de diametrul considerat, deci D, D' sunt simetrice față de WW'.

Dacă se consideră un triunghiu ABC înscris în cercul (O), se obține triunghiurile DEF, D'E'F' metaarmonicele punctelor W, W', deci *triunghiurile metaarmonice a două puncte conjugate pe un diametru, sunt simetrice față de diametru.*

Intersecția BC, EF este situată pe polara lui W', care trece prin W,... deci *axele de omologie ale triunghiului* ABC *cu fiecare din triunghiurile* DEF, D'E'F' *sunt perpendiculare în* W' *respectiv* W *pe* WW'.

Fie ϱ puterea lui W la cercul (O); triunghiurile WBC, WEF fiind asemenea, avem

$$\frac{EF}{BC} = \frac{WF}{WB} = \frac{WF.WC}{WB.WC} = \frac{\varrho}{WB.WC},$$

sau

$$\frac{EF}{BC.AW} = \frac{FD}{CA.BW} = \frac{DE}{AB.CW},$$

întrucât ultima relație arată că numerele BC.AW,... sunt proporționale cu numerele ce măsoară laturile unui triunghiu DEF, se regăsește propoziția menționată incidental și anterior: W *fiind un punct arbitrar in planul unui triunghiu* ABC, *cu lungimi proporționale cu* BC.AW, CA.BW, AB.CW *se poate forma un triunghiu* și în particular, *pentru triunghiul echilateral* ABC, *cu* AW, BW, CW *se poate forma un triunghiu* (teorema *Pompeiu*); considerațiile precedente arată că *acest ultim triunghiu este asemenea cu acela obținut unind intersecțiile punctului* W *cu cercul circumscris triunghiului echilateral.* In cazul când W este situat pe cerc, construcția e improprie, atunci un segment este egal cu suma celorlalte două; dacă AW este distanța mai mare, $AW = BW + CW$.

Revenind la subiect, dacă W, W' sunt punctele *Apollonius,* distanțele WD, WE, WF respectiv W'D', W'E', W'F' sunt proporționale cu laturile; și distanțele AW, BW, CW,... fiind invers proporționale cu laturile, $DE = EF = FD$,... deci *triunghiurile metaarmonice ale punctelor* A *sunt echilaterale.*

Reciproc, în configurația *Pompeiu*, există două triunghiuri echilaterale, care să conducă la același triunghiu ABC, sunt triunghiurile metaarmonice ale punctelor *Apollonius.*

NOTE MATEMATICE

2. *Problèmes d'analyse diophantienne.*

A. *Trouver 3 carrés de nombres entiers consécutifs dont la somme est égale à celle des carrés de 4 nombres entiers consécutifs.*

On doit avoir

$$(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=(y-1)^2+y^2+(y+1)^2+(y+2)^2,$$

ou

$$3x^2+2=4y^2+4y+6,$$

$$3x^2=(2y+1)^2+3, \quad \text{donc } 2y+1=3z$$

$$3x^2=9z^2+3,$$

$$x^2=3z^2+1.$$

Cette équation admet les solutions

x	2	7	26	97	362	1351 ...
z	1	4	15	56	209	780 ...

On a les relations de récurrence

$$\begin{cases} x_{n+1}=4x_n-x_{n-1} \\ z_{n+1}=4z_n-z_{n-1}. \end{cases}$$

Pour le problème proposé z doit être impair. Nous avons, pour les solutions d'indice impair (qui sont les seules impaires pour z, pour x elles sont paires) les relations de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1}=14x_{n-1}-x_{n-3} \\ z_{n+1}=14z_{n-1}-z_{n-3}. \end{cases}$$

Nous trouvons ainsi :

$$\begin{cases} \begin{array}{c|cccc} x & 2 & 26 & 362 & 5042 \ldots \\ \hline z & 1 & 15 & 209 & 2911 \ldots \end{array}, \end{cases} \quad \text{d'où}$$

1. $(1^2+2^2+3^2=0^2+1^2+2^2+3^2$, solution triviale),
2. $25^2+26^2+27^2=21^2+22^2+23^2+24^2$
$(=2030=2.5.7.29)$.
3. $361^2+362^2+363^2=312^2+313^2+314^2+315^2$
$(=393134=2.7.28081)$.
4. $5041^2+5042^2+5043^2=$
$4365^2+4366^2+4367^2+4368^2 \ (=76.265.294)$.

B. *Trouver 4 carrés de nombres entiers consécutifs dont la somme égale celle des carrés de 5 nombres entiers consécutifs.*

On a l'équation

$$(x-1)^2+x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=$$
$$(y-2)^2+(y-1)^3+y^2+(y+1)^2+(y+2)^2,$$

ou

$$4x^2+4x+6=5y^2+10,$$

$$(2x+1)^2=5y^2+5, \quad \text{donc } 2x+1=5z$$

$$25z^2=5y^2+5,$$

$$y^2=5z^2-1.$$

Cette équation admet les solutions

z	1	17	305	5473 ...
y	2	38	682	12238 ...

Relations de récurrence

$$\begin{cases} z_{n+1}=18z_n-z_{n-1} \\ y_{n+1}=18z_n-y_{n-1}. \end{cases}$$

Pour le problème qui nous occupe z doit être impair. Donc toutes les valeurs de z conviennent.

Exemples.

1. $(1^2+2^2+3^2+4^2=0^2+1^2+2^2+3^2+4^2$, solution triviale).
2. $41^2+42^2+43^2+44^2=36^2+37^2+38^2+39^2+40^2$
$(=7230=2.3.5.241)$.
3. $761^2+762^2+763^2+764^2=$
$680^2+681^2+682^2+683^2+684^2$
$(=2.325.630=2.3.5.77521)$.
4. $13681^2+13682^2+13683^2+13684^2=$
$12236^2+12237^2+12238^2+12239^2+12240^2$
$(=748.843.230)$.

Remarquons que les chiffres terminaux des 4 premiers nombres sont resp. 1, 2, 3, 4 et ceux des 5 autres resp. 0, 1, 2, 3, 4 ou ces chiffres retranchés de 10 (à l'exeption du 0).

A. GLODEN

3. — *Asupra unei probleme de geometrie.*

Imi propun să mă ocup de următoarea problemă de geometrie :

Se dă un triunghiu A B C *înscris într'o elipsă cu centrul* O ; *fie* A′ B′ C′ *complementarul lui* A B C *şi* P *un punct de pe elipsă. Paralela din* O *la* A P *tae pe* B′ C′ *în punctul* A_1 ; *analog*

găsim punctele B_1 *şi* C_1. *Să se arate că punctele* A_1, B_1, C_1 *sunt colineare.*

Vreau să soluţionez această problemă pe cale analitică. Luăm ca axe de coordonate, chiar axele de simetrie ale elipsei şi fie:

$A(a\cos\alpha_1,\ b\sin\alpha_1)$; $B(a\cos\alpha_2,\ b\sin\alpha_2)$;

$C(a\cos\alpha_3,\ b\sin\alpha_3)$; $P(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$.

Prinurmare deducem imediat de aici:

$$A'\left[\frac{a(\cos\alpha_2+\cos\alpha_3)}{2},\ \frac{b(\sin\alpha_2+\sin\alpha_3)}{2}\right];\ \text{etc.}$$

Paralela din O la AP şi $B'C'$ au respectiv ca ecuaţiuni:

$$b\,x\cos\frac{\alpha+\alpha_1}{2}+a\,y\sin\frac{\alpha+\alpha_1}{2}=0;$$

$$b\,x\cos\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}+a\,y\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}=$$

$$a\,b\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}.$$

Coordonatele punctului A_1 sunt prinurmare:

$$(1)\quad \begin{cases} x=\dfrac{-a\sin\dfrac{\alpha+\alpha_1}{2}\cos\dfrac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\cos\dfrac{\alpha_3-\alpha_1}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_2+\alpha_3-\alpha-\alpha_1}{2}}, \\ y=\dfrac{b\cos\dfrac{\alpha+\alpha_1}{2}\cos\dfrac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\cos\dfrac{\alpha_3-\alpha_1}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_2+\alpha_3-\alpha-\alpha_1}{2}}. \end{cases}$$

Coordonatele punctelor B_1 şi C_1 au valori analoage, cari se deduc din (1) prin permutări circulare.

Dacă presupunem acum că

$$\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\neq 0,$$

totul se reduce la a demonstra că determinantul:

$$\begin{vmatrix} \sin\dfrac{\alpha+\alpha_1}{2} & \cos\dfrac{\alpha+\alpha_1}{2} & \cos\dfrac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\sin\dfrac{\alpha_2+\alpha_3-\alpha-\alpha_1}{2} \\ \sin\dfrac{\alpha+\alpha_2}{2} & \cos\dfrac{\alpha+\alpha_2}{2} & \cos\dfrac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\sin\dfrac{\alpha_3+\alpha_1-\alpha-\alpha_2}{2} \\ \sin\dfrac{\alpha+\alpha_3}{2} & \cos\dfrac{\alpha+\alpha_3}{2} & \cos\dfrac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\sin\dfrac{\alpha_1+\alpha_2-\alpha-\alpha_3}{2} \end{vmatrix},$$

este nul. Dacă notăm acest determinant cu Δ şi dacă îl desvoltăm după elementele coloanei a treia, găsim:

$$\Delta=\sum\sin\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3-\alpha-\alpha_1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sum\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin\frac{(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1)-\alpha}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sum\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sum\sin(\alpha_2-\alpha_3)\cos\frac{\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1}{2}.$$

Transformând fiecare produs în sumă, vedem că cele două sume sunt nule, Δ este nul, şi prin urmare punctele A_1, B_1, C_1 sunt colineare.

Problema este astfel complect rezolvată.

Ar fi interesant de văzut *care este înfăşurătoarea dreptei* $A_1B_1C_1$ *de mai sus, când punctul* P *se mişcă pe elipsa dată.* Dar asupra unei asemenea chestiuni cu altă ocazie.

VIRGIL CLAUDIAN

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLIII, No. 7, Martie 1938. † *Gh. Em. Filipescu* (urmare), de *Ion Ionescu*. O clasă însemnată de suprafeţe, de *A. Myller*. Aritmetica lui *Gheorghe Asachi* (urmare), de *P. V. Cazanacli*. Matematica la expoziţia internaţională din Paris, de G-l *Gh. Buicliu* Note matematice. Probleme rezolvate şi propuse.

2. *Bulletin de Mathématiques et de Physique pures e-appliquées de l'École Polytechnique Roi Carol II, Bucarest*, Fasc. 22, 23, 24, VIII-ème Année 1936—1937. Une équation fonctionnelle à propos du centre de gravité de l'aire d'un triangle, par *D. Pompeiu*. La méthode de *M. Kubota*, par *G. Tzitzeica*. Sur la transmission excentrique d'un effort, par *Ion Ionescu*. Image mécanique d'un élément d'antenne, par *Vasilesco Karpen*. Calcul des Cadres, par † *G. Filipesco*. Sur le coup de belier. Construction d'oscillogrammes théoriques, par *D. Germani*. Quelques considérations sur les espaces supérieurs, par *C. Budeanu*. L'intensité des pluies de Bucarest, par rapport à leur durée et leur fréquence, par *Henri Theodoru*. Sur une généralisation de l'urne de *Bernoulli*, par *Octav Onicescu* et *G. Mihoc*. La notion de secousse et son rôle dans la dynamique, par *A. Beleş*. Les méthodes statistiques dans les recherches scientifiques, sociales ou économiques, par *J. Constantinescu*. Propriétés des triangles au même centre de gravité, par *Ernest Abason*. Rouge des aiguilles de l'Épicéa en Roumanie, par *Const. Georgesco* et *M. Badea*. Methode für Abscheidung und Nachweis der Metalle der Ammoniumcarbonatgruppe, von *Eugen Chirnoagă*. La clasification des éléments au point de vue biochimique, par *Matei Niculescu*. Equilibre d'une membrane au pourtour rectangulaire, soumise à une charge variant suivant la loi des pressions hydrostatiques, par *Cristea Mateesco*. Fondations en béton armé, sous piliers isolés, par *D. A. Stan*. Méthode au pentoxyde d'iode pour la détermination

de l'oxyde de carbone en faibles concentrations, par *Em. Bratu*. Sur la déformation des plaques sous l'action des charges non-uniformes, par *Nicolas Ciorănesco*. Sur la préparation de l'acide benzoïque à partir de l'essence, par *Th. Cerchez*. Les changements de voie de chemin de fer surhaussés, par *Gr. Strătilescu*. Ausflusserscheinungen bei scharfkantigen Öffnungen, von *D. Pavel*. Un nouveau cas d'application en électromagnétisme des fonctions cylindriques générales, par *Sabba C. Ştefănescu*. Sur les efforts dans les barres d'une ferme trapézoïdale, par *Cristea Nicolesco*. Sur les fonctions génératrices des polynomes de *Laguerre* généralisés, par *Th. Gheorghiu*. Sur l'équilibre des milieux continus, par *N. Théodoresco*.

3. *Revue mathématique de l'union interbalkanique*. Tome-Fascicule, 1938, Athènes. Sur les variables aléatoires arbitrairement liées, par *Hilda Geisinger*. Sur certaines suites infinies, dont les termes sont définis par des relations de récurence, par *N. Ciorănescu*. Le deuxième Congrès Interbalkanique des Mathématiciens, par *N. Ciorănescu*. Les solutions élémentaires des systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples, par *N. Théodoresco*. Ebene elastische Spannungszustände mit konstanter Hauptschubspannung, von *W. Prager*. Un chapitre de l'histoire de la Terre dans la lumière des sciences mathématiques, par *Milankovitch*.

4. *Ciel et Terre*, Bulletin mensuel de la Société Belge d'Astronomie, de Météorologie et de Physique du Globe, LIV-e année, No. 3, Mars 1938. Le courant de *Stroombant*, par *Adolphe Festraets*. Le remarquable interpretation d'une grande enigme astronomique: L'étoile duble spectroscopique ε aurigae, par *P. Swings*. L'Anneau astronomique, de Motter de l'Observatoire royal de belgrique, par *H. Michel*.

5. *Boletin Matematico*, anul X, No. 14, 1938, Buenos-Aires. Zece ani complecţi şi oarecare documente pentru istoria matematică Sudamericană, de *B. I. Baidaff*. Triplete de numere, de *Benedict Freedman*.

6. *Boletin Matematico*, anul X, No. 15, 1938, Buenes-Aires. Tabla de materie pe al X-lea an, de *A. Amenta*.

7. *Pitagora*, revistă de Matematici, anul al III-lea, Martie 1938 Exerciţiu de geometrie analitică, de *N. Mihăileanu*. Consideraţiuni în legătură cu o notă asupra unei ipoteze de refracţie astronomică, de *T. Vescan*. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

8. *Th. Anghelutza*. Sur une propriété qui caracterise la transformation conforme.

9. *Th. Anghelutza*. Sur une équations fonctionnelle qui définit les polynomes à plusieurs variables. (Extrait du Bulletin des Sciences mathématique, Décembre 1937.)

10. *D. Germani* Sur le coup de Belier. Construction d'oscillogrammes théoriques. (Extrait du Buletin de Mathématiques et de Physiques pures et appliquées de l'École Polytechnique „Roi Carol II", 1937.)

11. Prof. *Pompiliu Nicolau* şi Asist. *Victor Gheorghiu*. Determinarea pierderilor de sarcină în conducte circulare drepte de diametru 250 mm şi 125 mm. (Extrait du Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara, 1937.)

12 *Michel Ghermănescu*. Sur un problème de Mécanique. (Extrait du Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara, 1938.)

13. *Michel Ghermănescu*. Sur les combinaison exceptionnelles des fonctions entières. (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Academie des Sciences, Février 1938.)

14. *Gh. Th. Gheorghiu*. Sur les fonctions génératrices des polynomes de *Laguerre* généralisées. (Extrait du Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées de l'École Polytechnique „Roi Carol II", Bucarest, 1937.)

15. *Gh. Th. Gheorghiu*. Sur les coefficients de la factorielle et sur deux classes de polynomes harmoniques. (Extrait du Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences, t. XXXVIII, 1936.)

PROBLEME REZOLVATE

42. — *Să se rezolve şi să se discute după diversele valori ale lui m, ecuaţiunea*

$$m \sin^2 x - (3m^2 - 2m + 1)\cos x - 4m + 1 = 0.$$

M. VASILIU

Inlocuind pe $\sin x$ în funcţie de $\cos x$ ecuaţiunea propusă devine

$$(1)\quad m\cos^2 x + (3m^2 - 2m + 1)\cos x + 3m - 1 = 0.$$

Rădăcinele acestei ecuaţiuni, pentru a fi acceptabile, trebue să fie *reale şi cuprinse între* -1 *şi* $+1$. Pentru uşurinţa discuţiei să înlocuim pe $\cos x$ prin o funcţiune, care să varieze numai între -1 şi $+1$. Fie $y > 0$ şi

$$(2)\quad \cos x = \frac{1 - y}{1 + y}.$$

Membrul al doilea, este uşor de văzut, că ia valori numai între -1 şi $+1$, atunci când y variază de la 0 la $+\infty$.

Cu această transformare ecuaţiunea (1) devine

$$(3)\quad (3m^2 - 6m + 2)y^2 - 2(2m - 1)y - m(3m + 2) = 0.$$

Problema revine la a căuta valorile lui m pentru care ecuaţiunea (3) *să aibă rădăcinele pozitive şi reale.*

Prima condiţie, rădăcinele ecuaţiei (3) *sunt pozitive*, când suma şi produsul acestor rădăcini sunt pozitive, adică atunci când avem simultan

$$(4)\quad S = \frac{2(2m - 1)}{3m^2 - 6m + 2} > 0$$

şi

$$P = \frac{-m(3m + 2)}{3m^2 - 6m + 2} > 0,$$

sau

$$(5)\quad -P = \frac{m(3m + 2)}{3m^2 - 6m + 2} < 0.$$

Pentru rezolvarea neegalităţilor (4) şi (5) vom întrebuinţa metoda grafică descrisă în articolu

„Parabola şi rezolvarea neegalităţilor de gradul al doilea“ de d-l g-l *Gh. Buicliu,* publicat la pag. 35, Vol. I *Revista Matematică din Timişoara* şi care se rezumă astfel: Din observaţia că

$$y = a x^2 + b x + c$$

reprezintă o parabolă cu vârful în jos sau în sus după cum $a > 0$ sau $a < 0$, se deduce semnul trinomului în diferite regiuni ale planului. Astfel presupunând $a > 0$ şi x_1, x_2 rădăcinele ecuaţiunei

$$a x^2 + b x + c = 0$$

se vede imediat pe figura (1) că pentru toate punctele $M(x, y)$ de pe parabolă în regiunea cu haşuri verticale, $y > 0$, iar pentru punctele de pe parabolă în regiunea cu haşuri orizontale, $y < 0$.

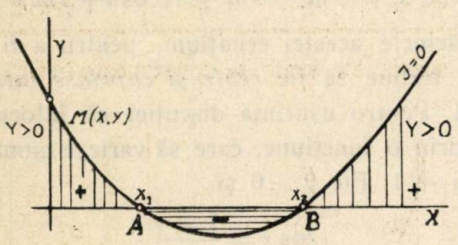


Fig. 1.

Cu alte cuvinte pentru $x_1 < x < x_2$ trinomul y este negativ, el este nul pentru $x = x_1$ şi $x = x_2$ şi este pozitiv pentru toate celelalte valori ale lui x.

Să revenim la neegalităţile (4) şi (5) şi să notăm

(6) $$u = 2m - 1,$$

(7) $$v = 3m^2 - 6m + 2,$$

(8) $$z = 3m^2 + 2m,$$

cele 3 funcţiuni de m, ale căror rapoarte definesc pe S şi P.

Valorile lui m, care anulează cele 3 funcţiuni sunt după cum urmează:

$$m = \frac{1}{2} = 0{,}5 \quad \text{pentru} \quad u = 0,$$

$$m = \frac{3+\sqrt{3}}{3} = 1{,}57\ldots \text{ şi } m = \frac{3-\sqrt{3}}{3} = 0{,}43\ldots$$

pentru $v = 0$,

$$m = 0 \quad \text{şi} \quad m = -\frac{2}{3} = -0{,}66 \text{ pentru } z = 0.$$

Construim pe fig. 2 dreapte U şi parabolele V, Z ale căror ecuaţii cu axele m, u, v, z cu origină comună, sunt ecuaţiile (6), (7), (8).

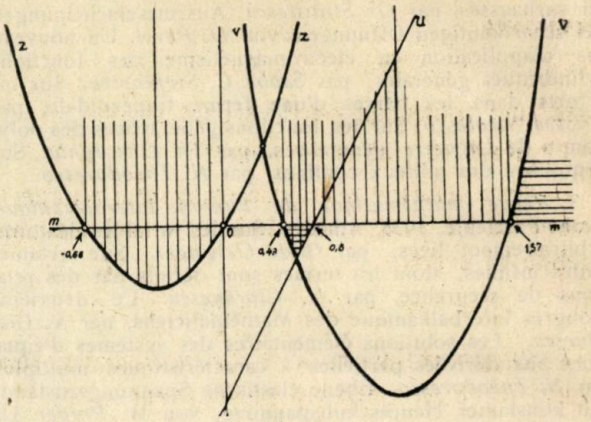


Fig. 2.

Pentru construcţia mai exactă a parabolelor din fig. 2, li s-au mai calculat coordonatele vârfurilor, punctelor în care întâlnesc axa verticală şi ale punctelor lor de intersecţie.

Din examinarea figurei 2 şi a valorilor lui S şi P se deduce că:

1. $S > 0$ când $u > 0$ şi $v > 0$, adică atunci când $m > 1{,}57\ldots$ sau când $u < 0$ şi $v < 0$, adică pentru $0{,}43\ldots < m < 0{,}5$.

Punctele de pe U şi V pentru care $S > 0$, sunt deci pentru m în regiunea cu haşuri orizontale.

2. $-P > 0$ când $V < 0$ şi $z > 0$, adică atunci când $0{,}43\ldots < m < 1{,}57$, sau când $v > 0$ şi $z > 0$, adică atunci când $-0{,}66 < m < 0$.

Regiunea punctelor de pe V şi Z pentru care $-P < 0$ este haşurată vertical.

Regiunile în care cele 2 feluri de haşuri se suprapun, este regiunea pentru care S şi P sunt simultan pozitive. Se vede că avem o singură astfel de regiune, pentru

$$0{,}43\ldots < m < 0{,}5.$$

Deci concluzia: *Ecuaţiunea* (3) *are rădăcini pozitive pentru*

(9) $$\boxed{0{,}43\ldots < m < 0{,}5}$$

Această condiţiune este necesară dar nu este suficientă, căci se poate ca ecuaţiunea (3) să aibă rădăcini imaginare şi totuşi S şi P să fie pozitivi.

In adevăr, dacă o ecuaţiune de gradul II are rădăcinele imaginare

$$a \pm b\,i,$$

vom avea

$$S = 2a, \qquad P = a^2 + b^2,$$

care sunt totdeauna pozitive dacă $a > 0$.

Urmează că trebue examinată:

A doua condiţie şi anume realizantul ecuaţiei (3) trebue să fie pozitiv. Notând cu R acel realizant, trebue să avem

$$(10) \qquad R = 9m^4 - 12m^3 - 2m^2 + 1 > 0.$$

Problema revine la a studia variaţiunea funcţiunei R de m. Derivând pe R, avem

$$(11) \qquad R' = 4m(9m^2 - 9m - 1),$$

care se anulează pentru

$$m_1 = 0; \quad m_2 = \frac{9 + \sqrt{117}}{18} = 1,1\ldots$$

şi

$$m_3 = \frac{9 - \sqrt{117}}{18} = -0,1\ldots$$

Construim în fig. 3 parabola

$$W = 9m^2 - 9m - 1,$$

care arată că $W < 0$ pentru $-0,1 < m < 1,1\ldots$ şi $W > 0$ pentru celelalte valori ale lui m. Examinând semnul produsului $m \times w$ se deduce

$R' < 0$ pentru $m < -0,1$ şi $0 < m < 1,1\ldots$

$R' > 0$ pentru $-0,1 < m < 0$ şi $1,1 < m$.

Rezultă că R nu se poate anula de cât pentru 2 valori ale lui m, una cuprinsă între 0 şi 1 căci $R(1) < 0$ şi una între 1,1 şi 2 căci $R(2) > 0$, celelalte 2 rădăcini ale ecuaţiei (10) sunt imaginare.

Aplicând metoda aproximaţiunilor succesive găsim că ecuaţia (10) are rădăcinile

$$0,40 < m < 0,41 \quad \text{şi} \quad 1,4\ldots < m < 1,5.$$

Pentru construcţia cât mai exactă a curbei R se pot calcula încă punctele de inflexiune, ale căror abscize sunt date de

$$R'' = 4(27m^2 - 18m - 1) = 0,$$

$$m_4 = 0.718\ldots \quad \text{şi} \quad m_5 = -0,051\ldots$$

Cu acestea, variaţia lui R se rezumă în tabelul

m	R′	R″	R
-1	$-$	$+$	$+20$ Desc.
$-0,1$	0	$+$	0,68 *Min.* Creşte
$-0,051$	$+$	0	Inflex. Creşte
0	0	$-$	1 *Max.* Desc.
0,40	$-$	$+$	0 Desc.
0,718	$-$	0	Inflex.
1	-4	$+$	-4
1,1	0	$+$	$-3,74$ *Min.* Creşte
1,4	$+$		0
$+\infty$	$+$	$+$	Creşte

Cu aceste elemente se construeşte în fig. 3 curba lui R.

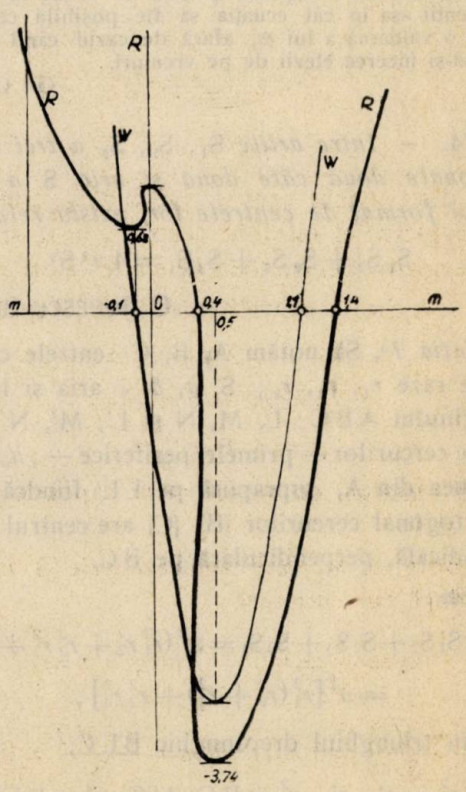


Fig. 3.

Atât din tabloul variaţiei lui R cât şi din curba R de pe fig. 3 se vede că $R > 0$, adică ecuaţia (3 are rădăcini reale, numai pentru

$\boxed{m < 0{,}41\ldots}$ şi $\boxed{1{,}4\cdots < m}$,

adică pentru valori în afara limitelor (9).

Deci de şi pentru $0{,}43\cdots < m < 0{,}5$ ecuaţiunea (3) are pe S şi P pozitivi, ecuaţiunea nu admite rădăcini reale în acest interval şi prin urmare ecuaţiunea propusă în enunţul problemei 42 nu admite radăcini pentru nici o valoare a lui m.

Notă. In 17 ani de când s-a propus această problemă, s-au primit soluţiuni de la 8 corespondenţi, care pe lângă numeroase erori de calcule nici n-au examinat problema de cât parţial. In majoritate, rezolvitoiri au căutat condiţiile ca realizantul ecuaţiei (1) să fie pozitiv, uitând că $\cos x$ nu poate avea orice valoare.

Singur d-l *O Ulman* a făcut transformarea (2) şi a stabilit neegalităţile (4) şi (5) de la care a conchis numai în câteva cuvinte concluziuni falşe.

Am dat soluţia dezvoltată în toate detaliile, pentru a pune la îndemâna corespondenţilor un fel de a examina complect o problemă ca aceasta şi a-i încuraja să nu evite calculele numerice, care le dă putinţa să verifice unele concluziuni deduse prin examinări teoretice sumare.

In fine, bănuesc că însuşi propunătorul problemei 42 nu a examinat-o complect, pentru că altfel ar fi ales coeficienţii aşa în cât ecuaţia să fie posibilă cel puţin pentru o valoarea a lui m, afară de cazul când nu o fi dorit să-şi incerce elevii de pe vremuri.

G-l Gh. B.

1274. — *Intre ariile* S_1, S_2, S_3 *a trei cercuri ortogonale două câte două şi aria* S *a triunghiului format de centrele lor, există relaţia:*

$$S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_1 = 4\pi^2 S^2.$$

C IONESCU-BUJOR

Soluţia 1°. Să notăm A, B, C centrele cercurilor de raze r_1, r_2, r_3; S, a, b, c aria şi laturele triunghiului A B C; L, M, N şi L', M', N' intersecţiile cercurilor — primele, periferice —; $h_a = A A'$ înălţimea din A, suprapusă pe L L' fiindcă cercul (A) ortogonal cercurilor (B), (C) are centrul pe axa lor radicală, perpendiculară pe B C.

Avem:

$$E = S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_1 = \pi^2 (r_1^2 r_2^2 + r_2^2 r_3^2 + r_3^2 r_1^2)$$
$$= \pi^2 [r_1^2 (r_2^2 + r_3^2) + r_2^2 r_3^2],$$

dar din triunghiul dreptunghic B L C,

$r_2^2 + r_3^2 = a^2$ şi $r_2^2 = B C \cdot A' C$, $r_3^2 = B C \cdot A' B$;

cum $A' B \cdot A' C = \overline{A' L}^2$, $A' L \cdot A' L' =$ puterea punctului L, faţă de cercul $(A) = \overline{A A'}^2 - r_1^2$, se poate continua:

$$E = \pi^2 [r_1^2 a^2 + a^2 (h_a^2 - r_1^2)] = \pi^2 a^2 h_a^2 = 4\pi^2 S^2.$$

c. c. t. d.

Soluţia 2°. Să transformăm succesiv, formula care dă aria triunghiului:

$$16 S^2 = 2 a^2 b^2 + 2 b^2 c^2 + 2 c^2 a^2 - a^4 - b^4 - c^4 =$$
$$\Sigma [2 b^2 c^2 - a^4] = \Sigma [(r_1^2 + r_2^2)(r_1^2 + r_3^2) - (r_2^2 + r_3^2)^2]$$
$$= \Sigma [2 (r_1^4 + r_1^2 r_2^2 + r_1^2 r_3^2 + r_2^2 r_3^2) - (r_2^4 + r_3^4 + 2 r_2^2 r_3^2)]$$
$$= \Sigma (2 r_1^4 - r_2^4 - r_3^4) + 2 \Sigma (r_1^2 r_2^2 + r_1^2 r_3^2) = 4 \Sigma r_2^2 r_3^2$$

$$* * * \qquad 4 S^2 = r_1^2 r_2^2 + r_2^2 r_3^2 + r_3^2 r_1^2,$$

multiplicând prin π^2 şi înlocuind $\pi r_1^2 = S_1, \ldots$ se obţine relaţia din enunţ.

Deşi soluţia 1° este cea mai simplă şi directă, nu se poate cita numele celor 3 autori ieşeni, fiindcă au lucrat-o în bloc!

Soluţia 2° algebrică, dar mai naturală, dată de d-ra: *Savin Marioara* şi de d-nii: *Amărăşteanu F. M.* (Colegiul Naţional Carol I, Craiova), *Apostol Radu*, *Cazanacli P.* (Iaşi), *Florescu L. Victor*, *Negrea A. Mircea-Leonte* (Brăila), *Predoescu Marin* (student), *Ştefănescu D. Nicolae* (lic. Milit. Mânăstirea Dealu), *Ţiţeica Ilie Ion*, *Vlad M. I.*, plus 15 soluţii identice dela liceul Militar, Cernăuţi.

D-l *Theodorescu N. Dorin* (clasa V-a, lic. Milit, M. Dealu) observă că relaţia $4 S^2 = \Sigma r_2^2 r_3^2$ este stabilită de însuşi propunătorul problemei, în G. M. XLII—457, relaţia 4 (Maiu 1937).

Soluţia propunătorului din Ianuarie 1934, este ea însăşi diferită de aceea din articolul citat: Din $a^2 = r_2^2 + r_3^2, \ldots$ se obţine $r_1^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) = b c \cos A$ şi fiindcă din $2 S = b c \sin A$ se obţine $r_1^2 = 2 S \cdot \operatorname{cotg} A$ şi relaţia devine

$$\operatorname{cotg} A \cdot \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} B \cdot \operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} C \cdot \operatorname{cotg} A = 1$$

valabilă între unghiurile unui triunghiu.

D-sa mai însoţeşte soluţia de observaţii, care au fost strânse în articolul: „*Asupra cercurilor ortogonale*" din G. M.

D-l *M. C. Postelnicescu* (lic. Mil. M. Dealu) dă o soluţie analoagă şi regăseşte propoziţia că centrul radical al celor trei cercuri este ortocentrul triunghiului.

D-l Sub-Lt *Gh. Sâmbotin* a redus relaţia la $S^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$ — unde $s_1 = \frac{1}{2} r_2 r_3, \ldots$ sunt ariile triunghiurilor B C L,... — pe carea verificat-o algebric.

Soluţia precedentă sugerează o *interpretare spaţială*; figura este poziţia rabătută a unui tetraedru tridreptunghiu de bază A B C, muchii r_1, r_2, r_3 cu vârful în T pe o perpendiculară pe plan, în ortocentru (folosesc pentru această afirmare, tot rezultatele d-lui *C. Ionescu Bujor* din G. M. XL. 299, articolul „*Asupra unor tetraedre*": *condiţia necesară şi suficientă pentru ca în tetraedrul* T A B C *proiec-*

a vârfului T *pe planul* A B C *să fie ortocentrul triunghiului* A B C, *este* $\overline{TA}^2+\overline{BC}^2=\overline{TB}^2+\overline{CA}^2=\overline{TC}^2+\overline{AB}^2$, îndeplinită, căci $a^2+r_1^2=b^2+r_2^2=c^2+r_3^2=r_1^2+r_2^2+r_3^2$)*). Se ştie că patratul ariei unui triunghiu A B C este suma patratelor proiecţiilor ei pe cele trei plane tridreptunghice $BTC=BLC,\ldots: S^2=s_1^2+s_2^2+s_3^2$.

S'a mai primit o verificare într'un caz cu totul particular: $r_2=r_3=\frac{1}{2}r_1$.

N. M.

1294. — *Să se stabilească inegalitatea*

$$\frac{1}{r_a\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{r_b\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{r_c\cos\frac{C}{2}}>\frac{1}{r}$$

EMILIAN MEREUTA

A, B, C fiind unghiurile unui triunghiu, sunt mai mici cu 180° şi atunci rezultă că $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$ sunt mai mici ca 90°, astfel că:

$$\cos\frac{A}{2}<1,\qquad \cos\frac{B}{2}<1,\qquad \cos\frac{C}{2}<1.$$

Rezultă de aci că avem:

$$\frac{1}{r_a\cos\frac{A}{2}}>\frac{1}{r_a},\quad \frac{1}{r_b\cos\frac{B}{2}}>\frac{1}{r_b},\quad \frac{1}{r_c\cos\frac{C}{2}}>\frac{1}{r_c},$$

Adunând aceste inegalităţi obţinem:

$$(1)\quad \frac{1}{r_a\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{r_b\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{r_c\cos\frac{C}{2}}>\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}.$$

Dar:

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r},$$

(Compléments de Trigonométrie par „F. G. M." p. 176), astfel că inegalitatea (1) devine:

$$\frac{1}{r_a\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{r_b\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{r_c\cos\frac{C}{2}}>\frac{1}{r}.$$

Inegalitatea cerută este astfel stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Amărăşteanu M.* (lic. Buzeşti, Craiova), *Cazanacli P.* (Chişinău), *Gavrilescu N. C-tin* (Iaşi), *Negrea A. Mircea-Leonte* (Brăila), *Popa Nicolae* (lic. Beiuş), *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Ştefănescu Nicolae* (lic. Milit, N. Filipescu) şi *Ţiţeica I. Ilie* (lic. Milit., N. Filipescu).

*) sau, sferele descrise pe A B, B C, C A ca diametre, formează o reţea cu axa perpendiculară de planul A B C în ortocentru, fiindcă el are puteri egale faţă de toate sferele.

1297. — *In anul 1931, ziua eroilor s-a serbat la 21 Mai, o dată cu Sfinţii Arhangheli Constantin şi Elena. Care este cel mai apropiat an în care se va mai întâmpla această coincidenţă. In calcul se va presupune că Paştele se stabileşte după normele vechiului calendar ortodox şi că celelalte sărbători, mai puţin ziua eroilor rămân ca în calendarul catolic.*

G L GH. BUICLIU

Sfinţii *Constantin* şi *Elena* se serbează invariabil la 21 Mai.

Ziua eroilor se serbează o dată cu *Înălţarea Domnului*, care cade în totdeauna în o zi de Joi la 40 zile după Duminica de Paşte, socotind în aceste 40 zile atât Duminica de Paşte cât şi ziua de Joi a *Înălţării*.

După normele actuale *Sf. Paşte* la noi ortodocşii, se stabilesc după normele vechiului calendar Gregorian, care în secolul acesta al 20-lea, are datele cu 13 zile în întârziere,

Prin urmare 21 Mai în calendarul Iulian este 8 Mai în vechiul calendar ortodox şi problema revine la a găsi anii în care *Înălţarea Domnului* cade la 8 Mai sau ceia ce este tot una, a găsi anii în care *Paştele* ortodox cade la 30 Martie.

Vom rezolva această problemă, după cum am spus pentru secolul XX.

După regula lui *Gauss*, Paştele cad la

$$22+d+e$$

Martie, în care d şi e se se calculează astfel:[1]) Căutăm resturile împărţirei anului prin 19, 4, 7. Fie a, b, c acele resturi. Restul împărţirei lui $19a+15$ este numărul d, iar restul împărţirei lui $2b+4c+6d+6$ prin 7 este numărul e.

Fie A numărul anului ce interesează. După cele date până aici rezultă că elementele de care avem nevoie pentru calculat ziua în care cade *Paştele* sunt legate prin relaţiunile următoare.

$$(1)\qquad A=19p_1+a=4p_2+b=7p_3+c,$$

[1]) A se vedea problema 2181 a d-lui Prof. *I. Ionescu*, rezolvată în *Gazeta Matematică*, Vol. XX, pag. 38.

(2) $$19a + 15 = 30q_1 + d,$$

(3) $$2b + 4c + 6d + 6 = 7q_2 + e,$$

(4) $$d + e = 8,$$

ultima relaţiune rezultând din faptul că ne interesează anii în care Paştele ortodox cade la

$$22 + d + e = 30 \text{ Martie.}$$

Din (1) se vede că

(5) $$a < 19; \quad b < 4; \quad c < 7.$$

Eliminând pe e între (3) şi (4) se obţine

$$2b + 4c + 7d - 2 = 7q,$$

$$2b + 4c - 2 = 7m,$$

(6) $$b + 2c - 1 = 7m.$$

Dând în (6) lui b şi c valorile maxime date de (4) se găseşte

$$7m = 14{,}7 \text{ sau } 0.$$

Ducând pe rând aceste valori în (6) şi căutând valorile întregi ale lui b şi c se găseşte rezultatul

(7)

b	0	1	2	3
c	4	0	3	6

,

iar din (4) se deduc pentru d valorile

(8) $$d = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

Ducem în (2) pe rând valorile lui d din (8).

Pentru $d = 0$, ecuaţia (8) devine

$$19a + 15 = 30q_1,$$

care dă pentru *a întreg şi mai mic de cât 19* numai soluţia $a = 15$.

Ducem acum această valoare în (1) unde se duc şi valorile b, c din (7) şi se obţin următoarele ecuaţiuni în care ultimul membru reprezintă soluţiile întregi

(9) $$A = 19p_1 + 15 = \begin{cases} 4p_2 = 7p_3 + 4 = 532t - 80 \\ 4p_2 + 1 = 7p_3 = 532t + 413 \\ 4p_2 + 2 = 7p_3 + 3 = 532t + 262 \\ 4p_2 + 3 = 7p_3 + 6 = 532t + 167 \end{cases}$$

Rezolvarea în numere întregi a uneia din aceste ecuaţiuni se poate face pe cale elementară în felul următor. Să luăm de exemplu

$$19p_1 + 15 = 4p_2 = 7p_3 + 4.$$

Primele două dau

$$4p_2 = 19p_1 + 15 = 20p_1 + 16 - p_1 - 1,$$

$$p_1 + 1 = 4m, \qquad p_1 = 4m - 1,$$

$$4p_2 = 7p_3 + 4 = 76m - 4,$$

$$7p_3 = 76m - 8 = 77m - 7 - m - 1,$$

$$m + 1 = 7t, \qquad m = 7t - 1,$$

$$19p_1 + 15 = 4p_2 = 7p_3 + 4 = 532t - 80.$$

La fel se rezolvă celelalte ecuaţiuni precum şi acelea ce urmează.

Pentru $d = 1$ se găseşte

(10) $$A = 10p_1 + 4 = \begin{cases} 4p_2 = 7p_3 + 4 = 532t + 413 \\ 4p_2 + 1 = 7p_3 = 532t - 168 \\ 4p_2 + 2 = 7p_3 + 3 = 532t + 189 \\ 4p_2 + 3 = 7p_3 + 6 = 532 + 20 \end{cases}$$

$d = 2$, nu dă valori acceptabile pentru a.

$d = 3$, dă:

(11) $$A = 19p_1 + 12 = \begin{cases} 4p_2 = 7p_3 + 4 = 532t + 88 \\ 4p_2 + 1 = 7p_3 = 532t - 7 \\ 4p_2 + 2 = 7p_3 + 3 = 532t - 102 \\ 4p_2 + 3 = 7p_3 + 6 = 532t + 335 \end{cases}$$

$d = 4$, avem:

(12) $$A = 19p_1 + 1 = \begin{cases} 4p_2 = 7p_3 + 4 = 532t + 476 \\ 4p_2 + 1 = 7p_3 = 532t + 77 \\ 4p_2 + 2 = 7p_3 + 3 = 532t - 18 \\ 4p_2 + 3 = 7p_3 + 6 = 532t - 113 \end{cases}$$

$d = 5$ nu dă valori acceptabile pentru a.

$d = 6$, *dă*

(13) $$A = 19p + 9 = \begin{cases} 4p_2 = 7p_3 + 4 = 532t + 256 \\ 4p_2 + 1 = 7p_3 = 532t + 161 \\ 4p_2 + 2 = 7p_3 + 3 = 532t + 66 \\ 4p_2 + 3 = 7p_3 + 6 = 532t - 29 \end{cases}$$

$d = 7$ nu dă soluţii pentru a. In fine

$d = 8$, *dă*:

(14) $$A = 19p_1 + 17 = \begin{cases} 4p_2 = 7p_3 + 4 = 532t + 340 \\ 4p_2 + 1 = 7p_3 = 532t + 245 \\ 4p_2 + 2 = 7p_3 + 3 = 532t - 382 \\ 4p_2 + 3 = 7p_3 + 6 = 532t + 55 \end{cases}$$

Dând lui t valori întregi, care să cuprindă pe A între 1900 şi 2000 se găsesc soluţiile

$A = 1960$ dat de a doua din (10),
$A = 1985$ „ „ „ treia „ (10),
$A = 1931$ „ „ „ patra „ (11),
$A = 1936$ „ „ „ prima „ (14).

Soluţia problemei este 1936.

1°. Un corespondent din Beiuş a trimis o soluţie în 5 rânduri cu rezultatul 1942 (?).

2°. Soluţia dată e *aplicabilă numai* dacă sărbătoarea *Sf. Paşte* se stabileşte după regula lui *Gauss*, ceia ce nu mai este cazul în legiurile nostre actuale, când se ştie că pentru a nu avea *Sf. Paşte* înaintea Paştelor evreieşti, Sfântul Sinod fixează ziua Paştelor după alte consideraţiuni.

G-l Gh. B.

1398. — *Să se afle minimul sumei.*

$$S = x + 2xy + 3xyz + 4xyzt,$$

ştiind că,

$$xy^2z^3t^4 = k, \qquad (k \text{ constant})$$

x, y, z, t fiind variabile.

V. ALACI

Folosim metoda multiplicatorilor. Pentru aceasta trebuie să anulăm derivatele parţiale ale expresiei,

$$E = x + 2xy + 3xyz + 4xyzt + \lambda xy^2z^3t^4$$

şi să alăturăm şi relaţia de condiţie, avem:

$$(1)\quad \begin{cases} 1 + 2y + 3yz + 4yzt + \lambda y^2z^3t^4 = 0 \\ 2x + 3xz + 4xzt + 2\lambda xyz^3t^4 = 0 \\ 3xy + 4xyt + 3\lambda xy^2z^3t^4 = 0 \\ 4xyz + 4\lambda xy^2z^3t^3 = 0 \\ xy^2z^3t^4 = k. \end{cases}$$

Avem astfel 5 ecuaţii cu cinci necunoscute x, y, z, t, λ.

Valorile găsite pentru x, y, z, t le vom înlocui în expresiunea lui S.

Pentru rezolvare vom folosi următorul artificiu: Inmulţim pe rând primele patru ecuaţii din (1) cu x, y, z, t şi având în vedere expresiunea lui S şi ultima ecuaţie din (1), sistemul (1) devine:

$$(2)\quad \begin{cases} S + \lambda k = 0 \\ S - x + 2\lambda k = 0 \\ S - x - 2xy + 3\lambda k = 0 \\ S - x - 2xy - 3xyz + 4\lambda k = 0 \\ xy^2z^3t^4 = k \end{cases}$$

Scădem acum: prima ecuaţie din a 2-a, a 2-a ecuaţie din a 3-a şi a 3-a ecuaţie din a 4-a, ceeace transformă sistemul (2) în următorul:

$$(3)\quad \begin{cases} -S = \lambda k = x \\ \lambda k = 2xy \\ \lambda k = 3xyz \\ \lambda k = -xyzt \\ xy^2z^3t^4 = k. \end{cases}$$

Cum x, y, z, t sunt diferiţi de zero, căci $k \neq 0$, putem împărţi: ecuaţia 2-a prin prima, a 3-a ecuaţie cu a 2-a şi a 4-a ecuaţie cu a 3-a şi obţinem:

$$\begin{cases} x = -S \\ 2y = 1 \\ \frac{3}{2}z = 1 \\ \frac{t}{-3} = 1 \\ xy^2z^3t^4 = k \end{cases} \quad \text{sau:} \quad (4) \begin{cases} x = -S \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{2}{3} \\ t = -3 \\ xy^2z^3t^4 = k. \end{cases}$$

Inlocuind în ultima ecuaţie din (4), valorile găsite pentru x, y, z, t, avem:

$$(-S) \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{27} \cdot 81 = k.$$

De aci deducem:

$$S = -\frac{k}{6}.$$

Acesta este minimul cerut.

Soluţie analoagă dată de d-l *Predoescu I. Marin* (Sc. Polit, Timişoara).

Alte soluţii, date de d-l *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila) şi *Predoescu I. Marin* (Şc. Polit., Timişoara).

Folosind articolul autorului problemei: *„Aflarea directă a maximului unui produs şi a minimului unei sume,* din *„Gazeta Matematică“*, vol. XIX, pp. 401—406 (valabil şi pentru cazul când variabile sunt reale, nu numai pozitive), se găseşte că minimul cerut pentru S are loc când avem:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2xy}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}} =$$

$$\frac{3xyz}{\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&1\\0&0&3&1\\0&0&4&1\end{vmatrix}}=\frac{4xyzt}{\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&2\\0&0&1&3\\0&0&0&4\end{vmatrix}}.$$

Dezvoltând determinanţii, avem:

$$\frac{x}{-1}=\frac{2xy}{-1}=\frac{3xyz}{-1}=\frac{4xyzt}{4}=\frac{S}{-1}.$$

Cum x, y, z, t sunt diferiţi de zero, deducem de aci

$$x=-S,\quad y=\frac{1}{2},\quad z=\frac{2}{3},\quad t=-3,$$

valori care introduse în relaţia de condiţie ne dă:

$$(-S)\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{27}\cdot 81=k,$$

deci:

$$S=-\frac{k}{6}.$$

PROBLEME PROPUSE

1666. — După un număr de două cifre se scrie dublul său, iar apoi triplul acestuia din urmă şi se obţine un patrat perfect de şapte cifre. Care este acel patrat?

G-L Gh. Buicliu

1667. — Să se construiască şi să rezolve un triunghiu drepunghic, cunoscând proecţiile simedianei unghiului drept pe cele două catete.

Caz particular: $m=4$, $n=3$.

Cherchez Mihu

1668. — Dintre toate patrulaterele înscrise în acelaş cerc să se găsească acela de suprafaţă maximă.

Cezar Ivanescu

1669 — Să se rezolve sistemul de ecuaţiuni:

$$(1+x)(1-y)=(1+y)(1-z)=(1+z)(1-t)=$$
$$(1+t)(1-x)=a.$$

Discuţiune. Caz particular $a=1$.

Lt. C. D. Ionescu-Ţiu

1670. — Să se rezolve ecuaţia:

$$(ax+\sqrt{a^2x^2+1})(bx+\sqrt{b^2x^2+1})(cx+\sqrt{c^2x^2+1})+1=0$$

şi să se discute realitatea rădăcinelor presupunând că (a, b) sunt coordonatele unui punct din plan, iar c un număr fix.

Vasile Vasu

1671. — Să se rezolve în numere întregi sistemul diofantian:

$$\begin{cases}x^2+Axy+By^2=z^3\\x\pm y=t^2\end{cases}$$

A. Gloden

1672. — In expresiunea:

$$P=x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n},$$

să se efectueze substituţia definită de relaţiile:

$$\begin{cases}A_1x_1^{a_1}x_2^{c_2}\ldots x_n^{a_n}=X_1,\\A_2x_1^{b_1}x_2^{b_2}\ldots x_n^{b_n}=X_2,\\\ldots\ldots\ldots\ldots\\A_nx_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_n^{l_n}=X_n,\end{cases}$$

unde m_i, A_i, a_i, b_i, ..., l_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ sunt constante.

V. Alaci

1673. — Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases}2\sin x(\sin x+1)+2\sin y(\sin y+1)+\\\qquad 2\sin z(\sin z+1)=3\\2\sin x(\sin x-1)+2\sin y(\sin y-1)+\\\qquad 2\sin z(\sin z-1)=3\\4\sin x\cos^2 x+4\sin y\cos^2 y+4\sin z\cos^2 z=3\end{cases}$$

I. Curea

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Andrievici N. (1389, 1405); *Armencea C.* (1616); *Bârlea G. Victor* (1650); *Brădeanu Nicolae* (1591, 1650); *Buzneа D. Dinu* (1635, 1637, 1646, 1647, 1649, 1657); *Cemat Camil* (1567, 1614, 1631); *Diaconescu D. Ion* (1591, 1611, 1614, 1617, 1620, 1623, 1625, 1647); *Gligor N. Ioan* (1633, 1659); *Gloden A.* (N., P.. 1649, 1658, 1664); *Jidanu I. C.* (P., 1656, 1657); *Matei Agustin* (P., 1658, 1659, 1663, 1664); *Mironescu I. D-tru* (1614, 1620); *Modâlcă S. E.* (P., 1567, 1571, 1590, 1592, 1602, 1610, 1616, 1617, 1620, 1630, 1648, 1649, 1652, 1655, 1664); *Negrea A. Mircea* (1583, 1585, 1601, 1606, 1622, 1646, 1655, 1656, 1663, 1664); *Papadopol D. Elena* (P., 1659); *Şandor Vasile* (1592. 1620, 1638, 1650, 1652, 1664); *Segal Zigu* (1640, 1646, 1649, 1650, 1652, 1655, 1663, 1664); *Segal Zoe* (1569, 1574, 1584, 1592, 1601, 1611, 1614, 1616, 1620, 1623, 1638, 1648, 1655, 1664, 1665); *Selmereanu Horia* (P., 1602, 1650, 1659, 1664); *Slavov Iacob* (1591, 1614, 1616, 1634, 1649, 1650); *Staicu I. N.* (1652); *Ştefănescu Marin* (1582, 1583, 1584, 1585, 1587, 1592, 1593); *Stoenescu D. Mirel* (1593, 1649, 1655); *Tătaru Alexandru* (P., 1650, 1659, 1664); *Theodorescu N. Dorin* (1653); *Topalescu Gh.* (1638); *Vijelie Gh. Eugen* (1598); *Voicu Aurelian* (1652).

INFORMAŢIUNI

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL XI-LEA

care a început în Martie 1938.

Costul *special* a unui abonament este de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Abonamentele se pot face la Redacţia „R. M. T."

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecţia R. M. T., anul XV, în volum şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS :
1 an : Belgique, **30 fr.** France, **25** fr.
Etranger, 7 **belgas**

Administration :
SPHINX, Bruxelles 173, Avenue Longchamp

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Rugăm pe corespondenţii nostrii, a ne trimete de urgenţă costul abonamentului de 100 (una sută) lei, pentru „R. M. T." pe anul XVIII, care a început la 15 Martie 1938.

ANUL XVIII. 15 MAIU 1938 No. 3.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **GH. CONSTANTINESCU**. SOLUTIUNILE INTREGI ALE ECUATIEI, $x^2 - a\,y^2 = b$.
2. NOTE MATEMATICE: 4, 5.
3 BIBLIOGRAFIE.
4. INSTIINTARE
5. PROBLEME REZOLVATE: 1387, 1445, 1526, 1533, 1385, 1592, 1601.
6. PROBLEME PROPUSE: 1674-1680.
7. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colț al țării și de la orice școală, trebuie să fie apostol al specialității sale. Din felul cald și luminos cum își face lecțiile, din drumul drept și demn pe care îl urmează în viață, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă și sigură, curată ca cristalul, are o înaltă și admirabilă valoare educativă pentru viață.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieței noastre. Aceasta să fie contribuția specialității noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ȚIȚEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Școala Politechnică, Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui Prof. **C. Teodorescu**, Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii și cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timișoara" este pentru anul XVIII, de 200 (două sute) lei.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVIII inclusiv, broșate, 120 lei fiecare.

ANUL XVIII — NO. 3 TIMISOARA, 15 MAIU 1938

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

SOLUȚIUNILE ÎNTREGI ALE ECUAȚIEI

$$x^2 - a y^2 = b.$$

De

PROF. GH. CONSTANTINESCU

1. In „R. M. T.“, volumul XVI, numerile 1 și 2, am arătat că soluțiile acestei probleme date atât de *Euler* cât și de *Lagrange* nu sunt generale și am dovedit în mod riguros, în cazul când b este prim sau un produs de două numere prime că soluțiile date de mine în „R. M. T.“, sunt generale.

In cele ce urmează, voi da formule, cari dau soluțiunile generale ale acestei ecuațiuni ori care ar fi b.

2. Ecuația $x^2 - a y^2 = b$ reprezintă geometric o hiperbolă raportată la axele sale și dacă un punct $M_1(x_1 y_1)$ de coordonate întregi se găsește pe această curbă și simetricele acestui punct, față de axe și origine, vor avea coordonatele tot întregi.

Pentru a determina toate soluțiile întregi ale acestei ecuațiuni, vom arăta că ele sunt așezate pe rețele poligonale ale căror direcțiuni sunt determinate de rețeaua poligonală pe cari sunt așezate soluțiile întregi ale ecuațiunei: $u^2 - a v^2 = 1$.

3. Ecuația $u^2 - a v^2 = 1$, are ori care ar fi a o soluție $u = 1$ și $v = 0$ pe care o numim soluție banală.

Din două puncte $m_1(u_1, v_1)$ și $m_2(u_2, v_2)$ de coordonate întregi ale acestei ecuațiuni, găsim un al treilea punct $m_3(u_3, v_3)$ de coordonate tot întregi, luând intersecția dreptei ce trece prin m_1, paralelă cu tangenta în m_2 la curbă, cu hiperbola însăși.

Ecuațiunea dreptei $m_1 m_3$, paralelă cu tangenta în m_2 la curbă este:

$$v - v_1 = \frac{u_2}{a v_2}(u - u_1).$$

Eliminăm pe v din această ecuație și aceia a curbei, găsim:

$$u^2 - 2 u u_2 (u_1 u_2 - a v_1 v_2) - a v_2^2 (u_1 u_2 - a v_1 v_2)^2 = 0$$

Suma rădăcinilor acestei ecuații este:

$$u_1 + u_3 = 2 u_2 (u_1 u_2 - a v_1 v_2)$$

și pentru v_1 și v_3 găsim:

$$v_1 + v_3 = 2 v_2 (u_1 u_2 - a v_1 v_2).$$

Din aceste egalități se vede că u_3 și v_3 sunt întregi, dacă u_1, v_1 și u_2, v_2 sunt întregi.

Ducem acum din m_2 o dreaptă paralelă cu tangenta în m_3 la curbă și găsim un al patrulea punct $m_4(u_4, v_4)$ de coordonate tot întregi.

Continuăm tot așa și găsim un șir de puncte $m_1 m_2 \ldots m_k$, cari au coordonate întregi.

4. Punctele inițiale m_1 și m_2 fiind oare-care, e natural că șirul de puncte găsit să nu reprezinte toate punctele de coordonate întregi.

Să presupunem că pe hiperbolă s'ar mai găsi un punct m'_k în afară de șirul găsit, care să aibă coordonatele întregi și să presupunem că acest punct să fie cuprins în întervalul $m_k m_{k+1}$ dat de șirul găsit. Știm că dreapta $\overline{m_{k+1} m_{k-1}}$ este paralelă cu tangenta în m_k la curbă și dacă ducem din acest punct m'_k o dreaptă paralelă cu $\overline{m_{k+1} m_{k-1}}$ găsim prin intersecția ei cu curba un punct $m'_k = 1$, care este cuprins între m_{k-1} și m_k și ale căror coordonate sunt tot întregi și continuând, tot așa găsim un al doilea șir de puncte $m'_1 m'_2 \ldots m'_k$ de coordonate întregi și cari sunt așezate câte unul în fie-care interval determinat de primul șir. Rezultă că ecuația $u^2 - a v^2 = 1$ are șiruri de soluțiuni, care se pot găsi numai dacă cunoaștem câte o singură soluțiune.

5. Dacă alegem primele două puncte m_1 şi m_2 în aşa mod ca între ele să nu mai fie nici un punct de coordonate întregi, şirul determinat de aceste două puncte reprezintă toate soluţiunile întregi ale ecuaţiunei.

Intr'adevăr, dacă şirul nu ar reprezenta toate punctele de coordonate întregi, ar mai exista cel puţin un punct în afară de şir, care după (3) ar determina un al doilea şir, care ar avea câte un punct în fie-care interval determinat de primul şir şi deci şi în întervalul $m_1 m_2$ ar mai fi un punct de coordonate întregi, fapt imposibil, căci le-am ales aşa ca să fie consecutive, rezultă deci că primul şir determinat de m_1 şi m_2 alese să fie consecutive, reprezintă totalitatea punctelor de coordonate întregi.

6. Din 2. am găsit că:

$$u_3 = 2u_2(u_1u_2 - av_1v_2) - u_1$$
$$v_3 = 2v_2(u_1u_2 - av_1v_2) - v_1$$

şi deci

$$u_4 = 2u_3(u_2u_3 - av_2v_3) - u_2$$
$$v_4 = 2v_3(u_2u_3 - uv_2v_3) - v_2.$$

Se poate dovedi uşor egalitatea $u_1u_2 - av_1v_2 = u_2u_3 - av_2v_3$, înlocuind pe u_3 şi v_3 cu formulele de mai sus. In acelaş mod se dovedeşte că $u_iu_{i+1} - av_iv_{i+1} = u_1u_2 - av_1v_2$ şi deci rezultă că soluţiunile date de şirul $m_1m_2 \ldots m_k$, formează două şiruri recurente de gradul al 2-lea unde un termen se formează din suma celor 2 precedenţi înmulţiţi respectiv cu $2(u_1u_2 - av_1v_2)$ şi (-1).

7. Insemnăm cu u_1, v_1 soluţia pozitivă întreagă cea mai mică a acestei ecuaţiuni, cu această soluţie şi cu soluţia banală $\binom{1}{0}$, care sunt consecutive, formăm şirul recurent al căror termen se formează din suma celor 2 precedenţi înmulţiţi respectiv cu $2u_1$ şi cu (-1).

Odată determinat şirul soluţiunilor în modul acesta putem deduce imediat şi formula generală a soluţiunilor acestei ecuaţiuni:

Punem pe $2u_1 = \alpha + \beta$ şi $\alpha\beta = 1$ şi astfel vom avea

$$u_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$u_2 = 2u_1^2 - 1 = 2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - 1 = \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$$

$$u_3 = 2u_1u_2 - u_1 = \frac{\alpha^3+\beta^3}{2}$$

$$\vdots$$

$$u_n = 2u_1u_n - 1 - u_{n-2} = \frac{\alpha^n+\beta^n}{2},$$

iar pentru v vom avea:

$$v_2 = 2u_1v_1 = (\alpha+\beta)v_1$$

$$v_3 = 2u_1v_2 - v_1 = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}v_1$$

$$\vdots$$

$$v_n = 2u_1v_{n-1} - v_{n-2} = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}v_1.$$

Rezultă deci că formulele generale ale ecuaţiunei $u^2 - av^2 = 1$ sunt:

$$u_n = \frac{\alpha^n+\beta^n}{2} \quad \text{şi} \quad v_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}v_1,$$

unde $\alpha+\beta = 2u$ şi $\alpha\beta = 1$.

8. Insemnăm m_0 soluţia banală $\binom{1}{0}$ şi punctele şirului cu $m_1 m_2 \ldots m_k$, iar simetricile acestor puncte faţă de axa Ou cu $m_1', m_2', \ldots, m_k'$.

Dacă unim puntele două câte două, găsim o reţea poligonală, care se bucură de câte-va proprietăţi geometrice.

a. Deptele $\overline{m_0 m_{2i}}$ sunt paralele cu tangenta în m_i la curbă şi toate dreptele $\overline{m_k m_{2i-k}}$ sunt paralele cu aceiaşi dreaptă.

b. Dreptele $\overline{m_0 m_{2i+1}}$ sunt paralele cu $\overline{m_k m_{2i+1-k}}$ şi deci şi cu dreapta $\overline{m_i m_{i+1}}$ a reţelei poligonale.

c. Dreptele $\overline{m_i' m_{i+1}'}$ sunt paralele cu dreapta m_0m_1.

d. Dreptele $m_i m_{i+2}$ sunt paralele cu tangenta în m_1 la curbă.

9. Cu ajutorul unei soluţii particulare $M_1(x_1y_1)$ a ecuaţiei $x^2 - ay^2 = b$ şi cu reţeaua poligonală a punctelor $m_0, m_1, m_2, \ldots, m_k \ldots$ de coordonate întregi de pe curba $u^2 - av^2 = 1$ vom determina un şir de puncte $N_1, N_2, N_3 \ldots N_k \ldots$ de coordonate întregi, luând intersecţia cu hiperbola $x^2 - ay^2 = b$ a dreptelor care trec prin $M_1(x_1y_1)$ şi paralele cu $\overline{m_0 m_i}$.

Ecuaţia unei drepte care trece prin M_1 este:

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

ar intersecția acestei drepte cu hiperbola $x^2 - a y^2 = b$ este dată de ecuația:

$$x^2(1 - a m^2) - 2 a m x(y_1 - m x_1) - a(y_1 - m x_1)^2 - b = 0.$$

Această ecuațiune are două rădăcini x_1 și x_i a căror sumă este:

$$x_1 + x_i = \frac{2 a m (y_1 - m x_1)}{1 - a m^2}.$$

Inlocuim pe m cu coeficientul unghiular al dreptelor $\overline{m_0 m_i}$,

$$m = \frac{v_i}{u_i - 1}$$

și după simplificare, găsim:

$$x_i' = u_i x_1 - a v_i y_1$$

și pentru y_i găsim:

$$y_i' = v_i x_1 - u_i y.$$

Aceste puncte $N_i(x_i', y_i')$ au după cum se vede coordonatele întregi.

Dacă din punctul N_1 de coordonate

$$\begin{cases} x_1' = u_1 x_1 - a v_1 y_1 \\ y_1' = v_1 x_1 - u_1 y_1, \end{cases}$$

ducem paralele cu dreptele $m_0 m_i$ și luăm intersecția lor cu hiperbola $x^2 - a y^2 = b$, găsim iarăși o serie de puncte pe care să le notăm cu $M_2, M_3, \ldots, M_k$ ale căror coordonate sunt:

$$\begin{cases} x_i = u_i x_1 + a v_i y_1 \\ y_i = v_i x_1 + u_i y_1. \end{cases}$$

Punctele din acest șir, alternează cu punctele din primul șir.

Astfel numai cu o soluție particulară $M_1(x_1, y_1)$ am găsit două șiruri de soluțiuni ale ecuației.

Unim aceste puncte două câte două, găsim o rețea poligonală:

$$M_1 N_1 M_2 N_2 \ldots M_n N_n \ldots,$$

care se bucură de următoarele proprietăți geometrice:

a. Dreapta $M_1 N_1$ este paralelă cu $m_0 m_1$.

b. Dreapta $N_1 M_2$ este paralelă cu $M_1 N_2$ și deci cu dreapta $m_0 m_2$ care și ea este paralelă cu tangenta în m_1 la curba $u^2 - a v^2 = 1$.

d. Dreptele $N_i M_{i+1}$ sunt paralele cu tangenta în m_i.

10. Dacă ecuațiunea $x^2 - a y^2 = b$ ar mai avea încă o soluție M_i' în afară de rețeaua determinată de punctul M_i, atunci acest punct M_i' va determina o a doua rețea poligonală ale căror coordonate ale vârfurilor rețelei vor fi soluțiuni întregi pentru ecuația $x^2 - a y^2 = b$.

Să presupunem că punctul acesta M_i' este cuprins în intervalul $M_i N_i$ determinat de prima rețea.

Din acest punct ducem o dreaptă paralelă cu $M_i N_i$ și ea intersectează hiperbola $x^2 - a y^2 = b$ în punctul N_i' care are și el coordonatele tot întregi și fiind și el cuprins în același interval $M_i N_i$ ca și punctul M_i'.

Din fiecare din aceste puncte M_1' și N_i' ducem câte o paralelă cu dreapta $N_{i-1} M_i$, găsim prin intersecția lor cu hiperbola alte două puncte de coordonate întregi M_{i-1}' și N_{i-1}', cari sunt cuprinse în intervalul $M_{i-1} N_{i-1}$.

Continuând tot așa găsim o nouă rețea poligonală, care are câte două puncte în fiecare din intervalele $M_k N_k$, iar în intervalele $N_k M_{k+1}$ a doua rețea nu are nici un vârf.

In același mod găsim că dacă punctul M_i ar fi cuprins în intervalul $N_{i-1} M_i$ rețeaua determinată de acest punct va avea câte două puncte în fiecare interval $N_k M_{k+1}$ al primei rețele și în intervalele $M_k N_k$ noua rețea nu va avea nici un punct.

11. Să presupunem că punctul M_1 este ales în așa mod astfel că el să fie cel mai apropiat punct de coordonate întregi de vârful hiperbolei, adică cea mai mică valoare pentru x și y întregi și pozitivi.

Insemnăm cu M_1' simetricul lui M_1 față de Ox, rezultă deci că în intervalul $M_1' M_1$ hiperbola numai are nici un punct de coordonate întregi. In acest caz rețeaua $M_1 N_1 M_2 N_2 \ldots M_k N_k$ determinată de acest punct M_1 se bucură de proprietatea că în intervalele $N_i M_{i+1}$ determinate de această rețea, hiperbola $x^2 - a y^2 = b$ nu mai are alte soluții.

Să presupunem că ar mai fi un punct de coordonate întregi în afară de punctele date de prima rețea și cuprins în intervalul $N_{i-1} M_i$.

După 10. ştim că acest punct va da naştere unei a 2-a reţele, care ar avea câte două puncte în toate intervalele $N_k M_{k+1}$ şi deci va avea două puncte şi în intervalul $N_1 M_2$. Dacă din aceste două puncte vom duce câte o paralelă cu $M_1 N_1$ vom găsi prin intersecţia lor cu hiperbola alte două puncte de coordonate întregi, cuprinse între M_1 şi simetricul său M_1', or aceasta este imposibil pentru că noi am ales pe M_1 în aşa mod, ca între M_1 şi M' să nu mai fie nici o soluţie.

Rezultă deci că în intervalele $N_i M_{i+1}$ determinate de punctul M_1, astfel ales, hiperbola nu mai are nici o soluţie şi toate celelalte soluţiuni în afară de reţeaua poligonală, fac parte din alte reţele poligonale, cari au vârfurile numai în intervalele $M_i N_i$, iar capetele acestor reţele sunt toate cuprinse în intervalul $M_1 N_1$.

12. Rezultă că toate punctele de coordonate întregi sunt aşezate în vârfurile unor reţele poligonale, care au începuturile lor în regiunea $M_1 N_1$.

Insemnăm cu $M_{i,1}$ capătul reţelei a i-lea, care se găseşte în întervalul $M_1 N_1$ şi în acest întervalul se mai găseşte încă un punct al acestei reţele pe care să-l însemnăm cu $N_{i,1}$. Dreapta $M_{i1} N_{i1}$ este paralelă cu $M_1 N_1$ care este paralelă cu dreapta $m_0 m_1$ de la hiperbola $u^2 - a v^2 = 1$, deci este independent de b, putem deci determina intervalul în care se găsesc toate puntele $M_{i,1}$.

Capetele tutulor reţelelor, luând ca limită inferioră vârful hiperbolei, care are ca coordonate

$$x = \sqrt{b}, \qquad y = 0$$

şi punctul M care este la intersecţia hiperbolei cu diametru conjugat coardelor paralele cu $m_0 m_1$.

Coordonatele acestui punt M sunt:

$$x = \frac{\sqrt{b(u_1+1)}}{2}, \qquad y = \frac{\sqrt{b(u_1-1)}}{2a}.$$

Intervalul în care se găseşte al 2-lea punct al reţelor $N_{i,1}$ va fi de la punctul M până la punctul N, care se găseşte la intersecţia hiperbolei cu dreapta, care trece prin vârful hiperbolei paralelă cu dreapta $M_0 M_1$.

Coordonatele punctului N vor fi:

$$x = u\sqrt{b}, \qquad y = v\sqrt{b}.$$

13. Odată găsite intervalele unde să găsesc capetele reţelelor, care vor forma soluţiile reduse ale ecuaţiei, ne mai rămâne să arătăm cum se găsesc aceste soluţii reduse.

Din ecuaţia hiperbolei, găsim:

$$y^2 = \frac{x^2 - b}{a}.$$

Pentru ca y^2 să fie întreg, trebue ca să rezolvăm congruenţa:

$$x^2 \equiv b \pmod{a}.$$

Congruenţa are sau nu soluţiuni. In cazul când are o soluţiune x_1, trebue să cercetăm pentru care valori ale lui $x = ma \pm x_1$, unde m este un parametru variabil, avem pentru y^2 un patrat perfect. Parametrul m trebue să fie cuprins între:

$$E\left(\frac{\sqrt{b} \mp x_1}{a}\right) < m < E\left(\frac{\sqrt{\frac{b(u_1+1)}{2}} \mp x_1}{a}\right).$$

14. *Aplicaţie.* Să se rezolve ecuaţia:

$$x^2 - 11y^2 = 12950.$$

Soluţia redusă a ecuaţiei $u^2 - 11v^2 = 1$ este $u_1 = 10$ şi $v_1 = 3$, deci limitele între cari variază x_1 pentru a da soluţiile reduse ale ecuaţiei sunt:

$$113 < x < 271.$$

Soluţia congurenţei $z^2 \equiv 12950 \pmod{11}$ este ± 5, urmează că x va fi de forma: $x = 11m \pm 5$ şi deci el nu poate lua de cât următoarele valori:

115, 116, 126, 127, 137, 138, 148, 149, 159, 160, 170, 171, 181, 182, 192, 193, 203, 204, 214, 215, 225, 226, 236, 237, 247, 248, 259, 260, 270.

Incercăm toate aceste numere şi găsim că numai pentru următoarele valori ale lui x, căreia îi corespund pentru y.

$$\begin{cases} x_{11} = 115 \\ y_{11} = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{21} = 127 \\ y_{2,1} = 17 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{3,1} = 137 \\ y_{3,1} = 23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{4,1} = 149 \\ y_{4,1} = 29 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{5,1} = 193 \\ y_{5,1} = 47 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{6,1} = 215 \\ y_{6,1} = 55, \end{cases}$$

avem soluţii. Cu aceste 6 soluţii reduse, găsim următoarele 6 reţele poligonale:

(1) $\begin{cases} x_{1,i} = 115\,u_i + 55\,v_i \\ y_{1,i} = 115\,v_i + 5\,u_i \end{cases}$ $\begin{cases} x'_{1,i} = 115\,u_i - 55\,v_i \\ y'_{1,i} = 115\,v_i - 5\,u_i \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_{2,i} = 127\,u_i + 187\,v_i \\ y_{2,i} = 127\,v_i + 17\,u_i \end{cases}$ $\begin{cases} x'_{2,i} = 127\,u_i - 187\,v_i \\ y'_{2,i} = 127\,v_i - 17\,u_i \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_{3,i} = 137\,u_i + 253\,v_i \\ y_{3,i} = 137\,v_i + 23\,u_i \end{cases}$ $\begin{cases} x'_{3,i} = 137\,u_i - 253\,v_i \\ y'_{3,1} = 137\,v_i - 23\,u_i \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x_{4,i} = 149\,u_i + 319\,v_i \\ y_{4,i} = 149\,v_i + 29\,u_i \end{cases}$ $\begin{cases} x'_{4,i} = 149\,u_i - 319\,v \\ y'_{4,i} = 149\,v_i - 29\,u_i \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x_{5,i} = 193\,u_i + 517\,v_i \\ y_{5,i} = 193\,v_i + 47\,u_i \end{cases}$ $\begin{cases} x'_{5,i} = 193\,u_i - 517\,v_i \\ y'_{5,i} = 193\,v_i - 47\,u_i \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x_{6,i} = 215\,u_i + 605\,v_i \\ y_{6,i} = 215\,v_i + 55\,u_i \end{cases}$ $\begin{cases} x'_{6,i} = 215\,u_i - 605\,v_i \\ y'_{6,i} = 215\,v_i - 55\,u_i \end{cases}$

NOTE MATEMATICE

4. — *Sur la représentation des carrés par une somme de carrés.*

Avillez a donné en 1897 les identités:

$$(1 + x + y + xy + x^2 + y^2)^2 =$$
$$(1+x)^2(x+y)^2 + (1+y)^2(x+y)^2 + (1+x+y-xy)^2 =$$
$$x^2(x+y+1)^2 + y^2(x+y+1)^2 + (x+y+1)^2 +$$
$$(x+y+xy)^2.$$

Elles permettent de représenter certains carrés par une somme de 3 et de 4 carrés.

Nous avons aussi les identités suivantes:

$$(x^2 + a\,y^2 + b\,u^2 + a\,b\,v^2)^2 =$$
$$(x^2 - a\,y^2 - b\,u^2 + a\,b\,v^2)^2 +$$
$$a\,(2\,x\,y - 2\,b\,u\,v)^2 + b\,(2\,u\,x + 2\,a\,v\,y)^2 =$$
$$(x^2 - a\,y^2 + b\,u^2 - a\,b\,v^2)^2 +$$
$$a\,(2\,x\,y + 2\,b\,u\,v)^2 + a\,b\,(2\,v\,x - 2\,u\,y)^2 =$$
$$(x^2 + a\,y^2 - b\,u^2 - a\,b\,v^2)^2 +$$
$$b\,(2\,u\,x - 2\,a\,v\,y)^2 + a\,b\,(2\,v\,x + 2\,u\,y)^2 =$$
$$(x^2 - a\,y^2 + b\,u^2 + a\,b\,v^2)^2 +$$
$$a\,(2\,x\,y)^2 + b\,(2\,a\,v\,y)^2 + a\,b\,(2\,u\,y)^2 =$$
$$(x^2 + a\,y^2 - b\,u^2 + a\,b\,v^2)^2 +$$
$$a\,(2\,b\,u\,v)^2 + b\,(2\,u\,x)^2 + a\,b\,(2\,u\,y)^2 =$$
$$(x^2 + a\,y^2 + b\,u^2 - a\,b\,v^2)^2 +$$
$$a\,(2\,b\,u\,v)^2 + b\,(2\,a\,v\,y)^2 + a\,b\,(2\,v\,x)^2 =$$
$$(x^2 - a\,y^2 - b\,u^2 - a\,b\,v^2)^2 +$$
$$a\,(2\,x\,y)^2 + b\,(2\,u\,x)^2 + a\,b\,(2\,v\,x)^2.$$

Il y a 3 représentations de $(x^2 + a\,y^2 + b\,u^2 + a\,b\,v^2)^2$ par une somme de 3 carrés et 4 par une somme de 4 carrés.

En posant $a = b = 1$, il vient:

$$(x^3 + y^3 + u^3 + v^3)^2 =$$
$$(x^3 - y^3 - u^3 + v^3)^2 + (2\,x\,y - 2\,u\,v)^2 + (2\,u\,x + 2\,v\,y)^2 =$$
$$(x^3 - y^3 + u^3 - v^3)^2 + (2\,x\,y + 2\,u\,v)^2 + (2\,v\,x - 2\,u\,y)^2 =$$
$$(x^3 + y^3 - u^3 - v^3)^2 + (2\,u\,x - 2\,v\,y)^2 + (2\,v\,x + 2\,u\,y)^2 =$$
$$(x^3 - y^3 + u^3 + v^3)^2 + (2\,x\,y)^2 + (2\,v\,y)^2 + (2\,u\,y)^2 =$$
$$(x^3 + y^3 - u^3 + v^3)^2 + (2\,u\,v)^2 + (2\,u\,x)^2 + (2\,u\,y)^2 =$$
$$(x^3 + y^3 + u^3 - v^3)^2 + (2\,u\,v)^2 + (2\,v\,y)^2 + (2\,v\,x)^2 =$$
$$(x^3 - y^3 - u^3 - v^3)^2 + (2\,x\,y)^2 + (2\,u\,x)^2 + (2\,v\,x)^2.$$

Exemples numériques.

1°. $x = 3, \quad y = 2$

$$25^2 (= 5^4) = 20^2 + 15^2 + 0^2 = 18^2 + 12^2 + 6^2 + 11^2.$$

2°. $x = 5, \quad y = 2$

$$47^2 = 42^2 + 21^2 + 2^2 = 40^2 + 16^2 + 8^2 + 17^2.$$

3°. $x = 4, \quad y = 3, \quad u = 2, \quad v = 1$

$$15^2 = 2^2 + 10^2 + 11^2 = 5^2 + 14^2 + 2^2 = 10^2 + 5^2 + 10^2 =$$
$$6^2 + 12^2 + 3^2 + 6^2 = 11^2 + 2^2 + 8^2 + 6^2 =$$
$$14^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1^2 + 12^2 + 8^2 + 4^2.$$

4°. $x = 5, \quad y = 4, \quad u = 3, \quad v = 1$

$$51^2 = 1^2 + 34^2 + 38^2 = 19^2 + 46^2 + 14^2 =$$
$$31^2 + 22^2 + 34^2 = 19^2 + 40^2 + 8^2 + 24^2 =$$
$$33^2 + 6^2 + 30^2 + 24^2 = 49^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 =$$
$$1^2 + 40^2 + 30^2 + 40^2.$$

A. GLODEN

5. — *Notă asupra unor probleme.*

1°. 929, R. M. T., XVII—19. Pe figura desemnată acolo, pentru că $BE = \frac{1}{2} DE$, din triunghiurile asemenea CBE, AED, rezultă că $AD = 2.BC$.

Dacă această condiție e îndeplinită, în cazul I, rezultă și $DH = DE$. In adevăr, pentru orice fel de trapez $DH = EB$, căci

$$\frac{DH}{CF} = \frac{GD}{GC} = \frac{AB}{AF} = \frac{BE}{CF}.$$

In cazul II, fiindcă $DA = 2BC$ rezultă $OB = CD$, $OB = BA$; în cursul demonstrației s'a arătat că condiția ca GF să treacă prin mijlocul DE este $OC = OF$; această condiție trebue continuată: $CD = OB - FB = AB - CD$, sau $AB = 2.DC$ și trebue adăugată la $AD = 2.BC$. In acest caz avem două condiții.

E natural să fie așa, fiindcă dacă se urmărește două relații distincte: trei segmente egale, trebue puse două condiții, figurii. In primul caz cele două relații nu erau distincte, căci una există totdeauna, de unde și particularitatea că trapezul era determinat printr'o singură condiție. Aceasta a fost și intenția propunătorului.

2°. 1463. R. M. T., XVI - 134. Prima relație odată demonstrată, a doua se deduce din ea prin transformarea: $180° - A$, $90° - B$, $90° - C$. Ele admit o interpretare geometrică, căci fie O centrul cercului circumscris, H ortocentrul triunghiului ABC, A', A_1 proiecția lor pe BC, O_a centrul cercului *Carnot* O', O'_a proiecțiile O, O_a pe AH. Se cunoasc formulele $A'A_1 = R \sin(B - C)$,

$$HO' = OA_1 - HA' = R\cos A - 2R\cos B\cos C,$$

$$AO'_a = AA' + A_1O = 2R\sin B\sin C + R\cos A,$$

$$OH = R\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C},$$

$$AO_a = R\sqrt{1 + 8\cos A\sin B\sin C}.$$

Se observă că

$$OH^2 = A'A_1^2 + O'H^2, \quad AO_a^2 = A'A_1^2 + AO'^2_a,$$

deci:

$$1 - 8\cos A\cos B\cos C = \sin^2(B - C) + (\cos A - 2\cos B\cos C)^2.$$

$$1 + 8\cos A\sin B\sin C = \sin^2(B - C) + (\cos A + 2\sin B\sin C)^2.$$

3°. 1552. R. M. T., XVII—59. Pentru a dovedi, că

$$\operatorname{arc\,tg} u + \operatorname{arc\,tg} v + \operatorname{arc\,tg} w = k\pi.$$

Luând tangenta în ambele părți se obține

$$\frac{u + v + w - uvw}{1 - uv - vw - uw} = 0,$$

deci condiția

$$u + v + w = uvw.$$

Singurul caz de dubiu, în care și numitorul e nul

$$1 = uv + vw + uw, \tag{2}$$

deci partea a doua nedeterminată, conduce la a supune pe u, v, w să fie rădăcinile ecuației:

$$z^3 - tz^2 + z - t = 0,$$

$$z(z^2 + 1) = t(z^2 + 1), \quad ***$$

deci $u = t$, $v = i$, $w = -i$, caz banal căci

$$\operatorname{arc\,tg} i + \operatorname{arc\,tg}(-i) = 0, \text{ sau } k\pi.$$

Se observă și din rezultatul obținut că valoarea lui x, care anulează și numitorul, este $x = \pm 2i$, pentru care $u = 2i$, sau i, $v = -i$, sau $-2i$, $w = i$, sau $-i$.

Rămâne deci singura condiție (1).

Se mai poate rezolva problema și prin derivate și identificând constanta. Rezultă de aici în mod indirect, că dacă $u + v + w = uvw$, avem și

$$\sum \frac{u'}{1 + u^2} = 0.$$

N. N. MIHAILEANU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLII, No. 8, Aprilie 1938. † *Gh. Em. Filipescu* (urmare și sfârșit), de *Ion Ionescu*. Aritmetica lui *Gheorghe Asachi* (urmare), de *P. Z. Cazanacli*. Privire istorică asupra rezolvării ecuației cubice, de *Fl. Câmpan*. Asupra unor perechi de triunghiuri omologice, de *C. Ionescu-Bujor*. Premiul „Inginer *Al. Rosu*". Note matematice, probleme propuse.

2. *Boletin Matematico*, anul XI, N-rile 1 și 2, Martie și Aprilie 1938, Buenos-Aires. Derivata aritmetica și derivata geometrică, de *B. I. Baidaff*. Modulul și alte medii, casuri particulare ale unei aceleiași expresiuni matematice, de *J. Barral Souto*.

3. *Buletinul ședintelor* (Societatea română de Științe), anul II, No. 2. Activitatea Secțiunii de Matematici. Activitatea Secțiunii de Fizică. Activitatea Secțiunii de Chimie. Lista membrilor Societății Române de Științe pe anul 1938.

4. *Ciel et Terre*, LIV anée, No. 4, Avril 1938. L'aurore boréal du 25—26 janvier 1938, par *De Backer*.

5. *Pitagora*, anul III, No. 7, Aprilie 1938. Notă asupra studiului liniei drepte în Geometria analitică elementară, de *N. Balaban*. Asupra unei teoreme a d-lui *Pompeiu*, de *Călin Popovici*. Notă asupra unui exercițiu de geometrie analitică, de *R. Georgescu*. Probleme propuse.

6. *Buletin, revista cercului de studii şi a asociaţiei absolvenţilor şcoalei superioare P. T. T. Timişoara*, anul VII, No. 3, Martie 1938 (litografiat). Cuprinde articole de specialitate.

7. *V. Thébault.* Sur la géométrie du triangle et du tétraèdre. (Extrait des Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, 1937.)

8. *P. Delens.* Tétraèdre et Spères de *Roberts.* (Extrait des Annales de la Société Scientifique de Bruxelles.)

9. *A. Gloden.* Notes d'arihhmétique. (Overdruk uit: Nieuw archief voor wiskunde uitgegeven door het wiskundig genootschap te Amsterdam.)

10. *A. Moessner.* Numerical identities. (The Mathematics student, 1937.)

11. *A. Moessner.* Einige diophantische Gleichungen. (Extracted from The Tôhoku Mathematical Journal, vol. 43, 1937.)

INŞTIINŢARE.[1]

Domnul Director al liceului „Ion Maiorescu" din Giurgiu, a desemnat pe elevul **Văduva Fl. Marin** *din cl. VI pentru a primi drept premiu pe anul 1938—1939 un abonament la Revista Matematică din Timişoara.*

Pentru acest an premiul poartă numele **„Vasile Epurescu".**

PROBLEME REZOLVATE

1387. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} (x^2-y^2)(x^6+y^6)=3965 \\ (x^2+y^2)(x^6-y^6)=8645. \end{cases}$$

VASILE GODEANU

Notând,

$$(1) \qquad \begin{cases} x^2=u \\ y^2=v, \end{cases}$$

sistemul dat devine:

$$(2) \qquad \begin{cases} (u-v)(u^3+v^3)=3965 \\ (u+v)(u^3-v^3)=8645, \end{cases}$$

care se mai poate scri:

$$\begin{cases} (u^2-v^2)(u^2-uv+v^2)=3965 \\ (u^2-v^2)(u^2+uv+v^2)=8645. \end{cases}$$

Prin împărţire obţinem:

$$\frac{u^2-uv+v^2}{u^2+uv+v^2}=\frac{3965}{8645}=\frac{793}{1729}.$$

Aducând la formă întreagă şi reducând termenii asemenea avem:

$$936u^2-2522uv+936v^2=0.$$

Simplificând întâi cu 26, apoi împărţind cu v^2 şi notând

$$(3) \qquad \frac{u}{v}=z$$

găsim:

$$36z^2-97z+36=0,$$

de unde:

$$z_{1,2}=\frac{97\pm\sqrt{9409-5184}}{72}=\frac{97\pm\sqrt{4225}}{72}=\frac{97\pm65}{72}.$$

Inlocuind în (3) aceste valori, avem:

$$\frac{u}{v}=\frac{162}{72}=\frac{9}{4}, \qquad \frac{u}{v}=\frac{4}{9}$$

sau:

$$(4) \qquad u=\frac{9}{4}v, \qquad u=\frac{4}{9}v.$$

Inlocuind aceste valori în prima din ecuaţiile (2) obţinem:

$$\left(\frac{9}{4}v-v\right)\left(\frac{729}{64}v^3+v^3\right)=3965,$$

$$\left(\frac{4}{9}v-v\right)\left(\frac{64}{729}v^3+v^3\right)=3965,$$

sau:

$$\frac{5}{4}\cdot\frac{793}{64}v^4=3965, \qquad -\frac{5}{9}\cdot\frac{793}{729}v^4=3965.$$

De aci deducem:

$$v^4=4^4 \quad \text{şi} \quad v^4=-9^4.$$

Rezolvind aceste ecuaţii binoame, avem:

[1]) A se vedea publicaţia din „R M. T.", anul XVII, No. 9, p. 100.

$$v = 4\left(\cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2}\right),$$

$$v = 9\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{4} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{4}\right]$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3),$$

ceeace ne dă:

$$v_1 = 4,\quad v_2 = 4i,\quad v_3 = -4,\quad v_4 = -4i$$

şi

$$v_5 = \frac{9\sqrt{2}}{2}(1+i),\qquad v_6 = \frac{9\sqrt{2}}{2}(-1+i),$$

$$v_7 = -\frac{9\sqrt{2}}{2}(1+i),\qquad v_8 = \frac{9\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Dacă primele 4 valori ale lui v le înlocuim în prima ecuaţie din (4), avem valorile corespunzătoare pentru u; asemenea dacă ultimele 4 valori ale lui v le înlocuim în a 2-a relaţie din (4) avem valorile corespunzătoare pentru u.

Odată găsite sistemele de soluţii u, v, le înlocuim în relaţiile (1) şi găsim sistemele de soluţii x, y ale sistemului dat.

Putem întocmi în felul acesta următorul tablou de soluţii:

x	± 3	$\pm 3\sqrt{i}$	$\pm 3i$	$\pm 3\sqrt{-i}$
y	± 2	$\pm 2\sqrt{i}$	$\pm 2i$	$\pm 2\sqrt{-1}$

x	$\pm\frac{2}{3}\sqrt{v_5}$	$\pm\frac{2}{3}\sqrt{v_6}$	$\pm\frac{2}{3}\sqrt{v_7}$	$\pm\frac{2}{3}\sqrt{v_8}$
y	$\pm\sqrt{v_5}$	$\pm\sqrt{v_6}$	$\pm\sqrt{v_7}$	$\pm\sqrt{v_8}$

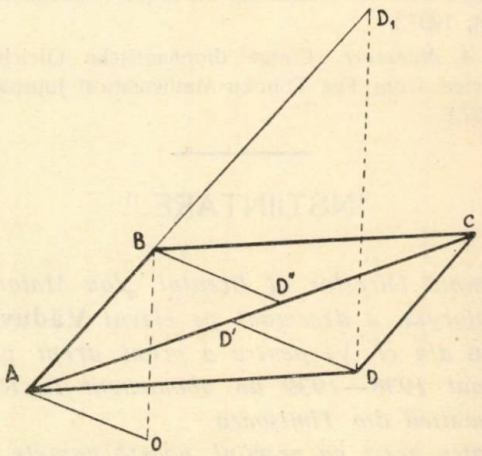
v_5, v_6, v_7, v_8, având valorile găsite mai sus.

Soluţii date d-nii: *Amăreşteanu F. Marcel* (Craiova), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Of. de Artilerie), *Marica I. Horia* (lic. Cluj), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Petrescu-Craioviţa Anastasie*, *Rauch Iosif* (lic. Mihai Viteazul, Bucureşti), *Stefănescu D. Nicolae* (lic. Milit, N. Filipescu) şi *Zagaican I.* (Conductor de L. P.)

1445. — *Se dă paralelogramul* A B C D *şi un punct* O *din plan. Se duce* D D′ *paralelă cu* A O *până taie pe* A C *în* D′. *Triunghiurile* A B O *şi* C D′ O *sunt echivalente.*

N. N. Mihaileanu

1°. *Soluţie geometrică* dată de d-nii *Bal Lascu* şi *Herman Al.* (studenţi, Cluj): Vârful B al triunghiului A O B îl mutăm pe o paralelă la A O în D″ pe A C; triunghiurile A B O şi A D″ O sunt deci echivalente, rămâne de arătat echivalenţa triunghiurilor A D″ O şi C D′ O; pentru aceasta se observă că triunghiurile A B D″ şi C D C′ sunt egale având laturele paralele şi A B=C D, deci A D″=C D′ şi triunghiurile A O D″, C O D′ au bazele egale şi aceeaş înălţime, deci sunt echivalente.



2°. *Soluţie trigonometrică* dată de d-l *Negrea A. Mircea-Leonte* (Brăila):

$$\text{aria}(A\,B\,O) = \frac{1}{2}\,A\,O\,.\,A\,B\sin O\,A\,B$$

şi

$$\text{aria}(C\,D'\,O) = \frac{1}{2}\,C\,D' \times O\,O',$$

O' fiind proiecţia lui O pe A C; dar

$$C\,D' = \frac{C\,D\,.\sin C\,D\,D'}{\sin D\,D'\,C} = \frac{A\,B\,.\sin O\,A\,B}{\sin O\,A\,C}$$

şi $O\,O' = O\,A\,.\sin O\,A\,C$, pe care înlocuindu-le se obţine aria $(C\,D'\,O) = \text{aria}(A\,B\,O)$.

3°. *Soluţie analitică:* Să luăm axele coordonate pe A B, A C, fie A $(0,0)$, B $(b,0)$, C $(0,c)$, D $(-b,c)$

şi $O(\alpha, \beta)$; AO are panta $\frac{\beta}{\alpha}$ şi paralela din D la AO, este

$$y - c = \frac{\beta}{\alpha}(x + b),$$

pe care o intersectăm cu AC făcând $x = 0$ şi $y_0 - c = b\frac{\beta}{\alpha}$, deci $D'(0, y_0)$; exprimând ariile, se obţine

$$\text{aria } OAB = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} b & 0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \frac{1}{2} b\beta$$

şi

$$\text{aria } OD'C = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 0 & y_0 & 1 \\ 0 & c & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\alpha(y_0 - c) = \frac{1}{2} b\beta.$$

Au dat soluţii analitice d-nii *Amărăşteanu F. Marcel* (Ş. Polit. Bucureşti) luând axele AB, AD şi *Pompeiu Marica* (lic. Beiuş), *Kivu C. Mişca* (lic. Focşani) în coordonate rectangulare.

4°. Considerând două forţe reprezentate prin $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ cu rezultanta $\overline{AC}$, după teorema *Varignon*, momentul rezultantei într'un punct oarecare O, este egal cu suma momentelor componentelor; însă momentul este dublul ariei respective, deci

$$\text{aria } (OAB) + \text{aria } (OAD) = \text{aria } (OAC) =$$
$$\text{aria } (OAD') + \text{aria } (OD'C),$$

însă triunghiurile OAD, OAD' sunt echivalente având DO' paralel cu AO şi rămâne echivalenţa cerută prin enunţ a triunghiurilor AOB şi OD'C. Aceasta este şi originea problemei.

5°. Paralela din D la OB taie pe AB în D_1; scriind analog, relaţia *Varignon*

$$\text{aria } (BAO) + \text{aria } (BCO) = \text{aria } (BDO) =$$
$$\text{aria } (BD_1O) = \text{aria } (BAO) + \text{aria } (DAO),$$

ariile exprimate în sensul strict, pentru a fi adevărate egalităţile, orice poziţie ar avea punctul O; în cazuri particulare de figură, dacă se priveşte valoarea absolută, unele paranteze trebuesc luate cu semnul — (minus), rezultă că şi triunghiurile BCO, ADO sunt echivalente.

Această propoziţie a fost demonstrată analitic, într'o soluţie foarte simplă, care a sugerat soluţia 3°, de d-ra *Naneş Cornelia* (studentă, Bucureşti), căci d-sa notând vârfurile paralelogramului în ordinea ABDC, a arătat că triunghiurile aşa cum erau scrise în enunţ, dar care acum s'au schimbat cu precedentele, sunt încă echivalente.

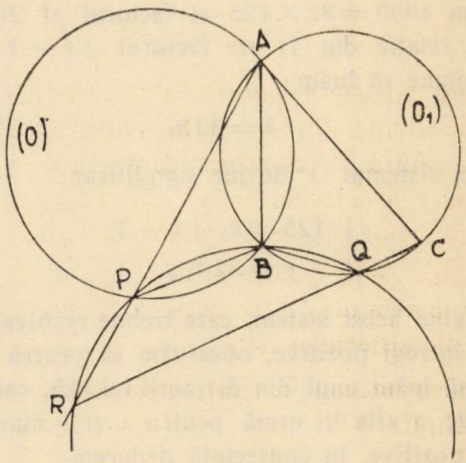
1526. — *Două cercuri* (O) şi (O_1) *se taie în* A *şi* B; *tangenta în* A *la* (O) *taie pe* (O_1) *în* C; *un cerc arbitrar dus prin* B *taie cercul* (O) *în* P, *pe* (O_1) *în* Q *şi pe* CQ *în* R. *Punctele* A, P, R *sunt colineare.*

N. N MIHAILEANU

Se observă pe figură că

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle BAC = \text{supl. } \sphericalangle BQC =$$
$$\sphericalangle BQR = \text{supl } \sphericalangle BPR.$$

Unghiurile APB, BPR sunt suplimentare, deci AP, RP în prelungire.



Soluţii date de d-ra *Comloşan Cornelia* (Cluj) şi de d-nii: *Apostol Radu* (cl. VII), *Deciulescu Gh.* (cl. V), *Florescu L. Victor* (cl. VI), *Lăzărescu St.* (cl. VII), *Negulescu V. Ştefan* (cl. VII), *Nicolescu I. Mihai* (cl. V), *Rădulescu Gh. Octavian* (cl. VI), *Ştefănescu Costin* (cl. VII, lic. Mil. Mânăstirea, Dealu), *Ripianu Andrei*, *Sternberg H.* (cl. VII, lic. A. Pumnul, Cernăuţi) şi *Vlad M. C. I.* (Sub-Lt.)

Observare: 1°. Propoziţia rămâne valabilă oricum ar fi construită figura. In demonstraţie, unele unghiuri egale din primul caz vor deveni suplimentare şi invers.

2°. Se poate vedea o altă soluţie în articolul *Propoziţii deduse prin inversiune*, R. M. T., XVII, Nr. 2° f.

1533. — *Să se rezolve în numere întregi pozitive ecuaţia:*

$$4000x + 3y = 4xy.$$

V. ALACI

Putem scri încă:

$$\frac{4000}{y} = \frac{4x-3}{x}.$$

Observăm că pentru $x=1$ obţinem $y=4000$; pentru $x=3$, avem $\frac{4000}{y}=3$, ceea ce nu ne dă pentru y un număr întreg.

Pentru $x \neq 1$ şi $x \neq 3$ fracţia din membrul al 2-lea este ireductibilă, ceeace ne permite a deduce sistemul:

$$(1) \qquad \begin{cases} 4000 = k(4x-3) \\ y = kx, \end{cases}$$

unde k, x, y sunt numere întregi pozitive.

Cum $4000 = 32 \times 125$ şi factorul al 2-lea din prima relaţie din (1) are factorul $4x-3$ impar, se impune să luăm

$$k = 32k_1$$

şi deci sistemul (1) devine simplificat:

$$(2) \qquad \begin{cases} 125 = k_1(4x-3) \\ y = 32k_1 x. \end{cases}$$

Privind acest sistem, care trebue rezolvat în numere întregi pozitive, observăm că pentru k_1 trebuie să luăm unul din divizorii lui 125, care ne-ar permite a afla în urmă pentru x şi y numere întregi pozitive. In consecinţă deducem:

1°. Pentru $k_1=125$, rezultă din (2), $4x-3=1$, deci $x=1$ şi atunci $y=4000$, soluţie deja găsită.

2°. Pentru $k_1=25$, rezultă din (2), $4x-3=5$, deci $x=2$ şi atunci $y=1600$.

3°. Pentru $k_1=5$, rezultă din (2), $4x-3=25$, deci $x=7$ şi atunci $y=1120$.

4°. Pentru $k_1=1$, rezultă din (2), $4x-3=125$, deci $x=32$ şi atunci $y=1024$.

Rezultă că soluţiile în numere întregi ale ecuaţiei date sunt:

x	1	2	7	32
y	4000	1600	1120	1024

Soluţii date de d-ra: *Comloşan Cornelia* (Cluj) şi de d-nii: *Cazanacli Petre* (Chişinău), *Matei D. D-tru* (Iaşi), *Popoviciu Gabriel* (Şc. Polit., Bucureşti), *Ripianu Andrei*, *Tilică C. Ştefan* (lic. T-Severin) şi *Vlad I. C. M.* (Sub-Lt.)

1585. — *Intr'un triunghiu oarecare avem relaţia:*

$$\frac{\cos A - \sin A + \cos B - \cos C + 1}{\cos A + \sin A - \sin B + \sin C - 1} = \operatorname{cotg} \frac{A}{2}.$$

LT. C. IONESCU-ŢIU

Ţinând seamă de unele relaţii de transformare cunoscute şi de faptul că

$$\sin \frac{B+C}{2} = \cos \frac{A}{2}, \qquad \cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2},$$

primul membru al relaţiei cerute se poate scri succesiv:

$$\frac{(\cos A + 1) + (\cos B - \cos C) - \sin A}{(\cos A - 1) + (\sin C - \sin B) + \sin A} =$$

$$\frac{2\cos^2 \frac{A}{2} + 2 \sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{C-B}{2} - 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{-2\cos^2 \frac{A}{2} + 2 \cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{C-B}{2} + 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} =$$

$$\frac{2 \cos \frac{A}{2} \left(\cos \frac{A}{2} + \sin \frac{C-B}{2} - \sin \frac{A}{2} \right)}{2 \sin \frac{A}{2} \left(-\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{C-B}{2} + \cos \frac{A}{2} \right)} =$$

$$\frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = \operatorname{cotg} \frac{A}{2}.$$

Relaţia din enunţ este astfel stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Apostol Radu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Babeţiu Corneliu* (lic. Loga, Timişoara), *Begu Ştefan* (Şc. Polit, Bucureşti), *Berinde L. Titus* (Şc. Polit., Timişoara), *Cetăţeanu Stelian* (lic. Şincai, Bucureşti), *Dăscălescu Şt. Hristache* (Focşani), *Diaconescu D. Ion* (lic. T-Severin), *Florescu Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Matei D. D-tru* (Iaşi), *Milu I. Nicolae* (Şc. Navală, Constanţă), *Modâlcă S. Emil* (lic. T-Severin), *Murgu V. Marţian* (Şc. Polit., Timişoara), *Negrea Mircea* (Brăila), *Petrescu C. Alin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Petrescu P. Benone* (lic. Milit., N. Filipescu), *Popescu Adrian* (Sub-Lt), *Popescu Zorica N. Alexandru* (Bucureşti), *Popoviciu Mircea* (lic. Lugoj), *Reicher Herman* (lic. Internat, Iaşi), *Ripianu Andrei* (Seminarul Pedagogic, Cluj), *Şandor Vasile*, *Segal Zigu* (lic. Vaslui), *Solomon Isac* (lic. Internat, Iaşi), *Stamate I. Ionel* (lic. Lugoj), *Stefănescu Marin* (Sub-Lt.), *Stefănescu D. Nicolae* (lic. Milit, N. Filipescu), *Stoenescu D Mirel* (lic. Milit., N. Filipescu), *Tica P. Marin* şi *Tiliçă C. Ştefan* (lic. T-Severin).

1592. — *Intr'un triunghiu isoscel de bază a, unghiu la vârf* A *şi latură b, avem relaţia.*

$$a(a^2 - 3b^2) + 2b^3 \sin\frac{3}{2}A = 0.$$

N. N. MIHAILEANU

In triunghiul isoscel menţionat,

$$a = 2b \sin\frac{1}{2}A$$

şi

$$\sin\frac{3}{2}A = \sin\frac{1}{2}A\left(3 - 4\sin^2\frac{1}{2}A\right),$$

deci expresia devine

$$E = a(a^2 - 3b^2) + 2b^3 \sin\frac{3}{2}A =$$

$$2b \sin\frac{1}{2}A\left(4b^2\sin^2\frac{1}{2}A - 3b^2\right) +$$

$$2b^3 \sin\frac{1}{2}A\left(3 - 4\sin^2\frac{1}{2}A\right) = 0.$$

Soluţii date de d-nii: *Andrunachievici Al. Vladimir* (stud., Iaşi), *Apostol Radu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Berinde L. T.*, *Buznea D. D.* (lic. Mil. Mânăstirea Dealu), *Cetăţeanu St.* (lic. Şincai, Bucureşti), *Dăscălescu Hristache* (Focşani), *Diaconescu D. Ion* (lic. T-Severin), *Florescu Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Gloden A.*, *Lupescu C.* (Sub-Lt, Roman), *Matei D. D.* (Iaşi), *Milu I. N.* (Şc. Navală, Constanţa), *Motăs Camil* (lic. Internat, Iaşi), *Petrescu C. Alin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Petrescu P. Benone* (lic. Milit, N. Filipescu), *Popoviciu Gabriel*, *Popoviciu Mircea* (lic. Lugoj), *Rădulescu Gh. Octavian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Reischer L. H.* (lic. Int., Iaşi), *Rosenblatt S. M.* (lic. Int., Iaşi), *Roth I. Alexandru* (lic Arad), *Saegiu V. C.* (Cluj), *Solomon Isac* (lic. Internat, Iaşi). *Stamate I. Ionel* (lic. Lugoj), *Stefănescu Costin* (lic. Milit, N Filipescu), *Stoenescu D. Mirel* (lic. Milit., N. Filipescu) şi *Tiltcă C. Ştefan* (lic. T-Severin).

Notă. 1°. In triunghiul isoscel A B C (B C = a, A B = A C = b), fie A D, B E înălţimile din A şi B concurente în H. Se află uşor

$$A H = \frac{2b^2 - a^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}, \qquad B H = \frac{ab}{\sqrt{4b^2 - a^2}},$$

Fie şi A F simetrica înălţimii A D faţă de A C, F pe B C; triunghiurile asemenea A B H, A F C, dau

$$A F = \frac{b^2\sqrt{4b^2 - a^2}}{2b^2 - a^2}, \qquad C F = \frac{ab^2}{2b^2 - a^2},$$

deci

$$B F = \frac{a(3b^2 - a^2)}{2b^2 - a^2}.$$

Fie B G perpendiculara din B pe A F,

$$B G = \frac{B F \cdot A D}{A F} = \frac{a(3b^2 - a^2)}{2b^2},$$

deci

$$\sin B A G = \sin\frac{3}{2}A = \frac{B G}{A B} = \frac{a(3b^2 - a^2)}{2b^3} \quad \text{c. c. t. d.}$$

2°. In relaţia mai generală, valabilă într'un triunghiu

$$a^3 = b^3 \cos 3C + c^3 \cos 3B + 3abc \cos(B - C)$$

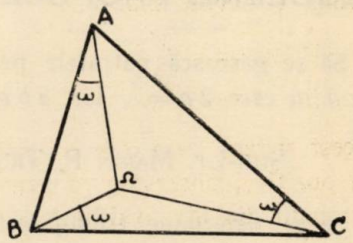
[G. M. XLII—470, sau XLIII, 56] se face $b = c$, $B = C = 90^0 - \frac{1}{2}A$ şi se obţine relaţia de demonstrat.

1601. — *Dacă* A, B, C *sunt unghiurile unui triunghiu şi dacă*

$$\operatorname{cotg}\omega = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C$$

să se arate că

$$\frac{\sin B \sin\omega}{\sin A} = \frac{\sin C \sin(B - \omega)}{\sin B}.$$



Soluţie dată de d-l *Petrescu C. Alin* (liceul militar, Nicolae Filipescu, Mânăstirea Dealu). Din relaţia de condiţie, se obţine

$$\operatorname{cotg}\omega - \operatorname{cotg} B = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} C,$$

deci

$$\frac{\sin(B - \omega)}{\sin B \sin\omega} = \frac{\sin B}{\sin A \sin C},$$

care este sub altă formă, relaţia de demonstrat.

Soluţii bune date şi de d-nii: *Andrunachievici Vladimir* (student, Iaşi), *Andrievici N.* (lic. Milit., N Filipescu), *Apostol Radu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Berinde L. Titus* (Şc. Polit, Timişoara). *Buznea D. Dinu* (lic Milit., N. Filipescu), *Cetăţeanu Stelian* (lic. Şincai, Bucureşti), *Dăscălescu Şt. Hristache* (Focşani), *Diaconescu D. Ion* (lic. T-Severin), *Florescu Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Gloden A.*, *Matei D. D-tru* (Iaşi), *Modâlca S. Emil* (lic. T-Severin), *Motăs Camil* (lic. Internat, Iaşi), *Popescu-Zorica N. Alexandru* (Bucureşti), *Rădulescu Gh. Octavian* (lic. Milit, N. Filipescu), *Reischer L. Herman* (lic. Internat, Iaşi), *Rosenblatt S. Millu* (lic. Internat, Iaşi), *Şandor Vasile*, *Solomon I. Isac* (lic. Internat, Iaşi), *Stefănescu Costin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Stefănescu F. Marin*, *Stoenescu D. Mirel* (lic. Milit., N. Filipescu) şi *Tilică C. Stefan* (lic. Traian, T-Severin).

D-nii *Deciulescu Gh.* (cl. VI, lic. Mil., N. Filipescu), *Segal Zigu* (lic. Vaslui) şi *Stamate I. I.* (lic. Lugoj), arată că, sub o formă apropiată, relaţia este dată în *Tr. Lalescu*: La Géométrie du Triangle, 17. 1. In momentul trimiterii problemei 1601 la redacţie, nu ştiam că e cunoscută, broşura precedentă încă nu apăruse şi nici *Numerus* caietul 23, care publică periodic materialul Dealtfel, am ajuns la ea printr'o metodă simplă şi care n'a fost dată în broşura citată şi nici de corespondenţi.

Fie Ω un punct *Brocard*, adică astfel ca $\sphericalangle A C \Omega = \sphericalangle B A \Omega = \sphericalangle C B \Omega = \omega$; din triunghiurile $B A \Omega$, $C A \Omega$ rezultă

$$A\Omega = \frac{A C \sin \omega}{\sin A} = \frac{A B \sin (B - \omega)}{\sin B},$$

care e chiar relaţia cerută.

Dar, indiferent de consideraţiile de prioritate, scopul problemei a fost atins; pe de o parte pentru exerciţiul util de trigonometrie făcut de corespondenţi; pe de alta, fiindcă a primit soluţia foarte bună şi probabil inedită a d-lui *Petrescu Alin.*

N. M.

PROBLEME PROPUSE

1674. — Să se găsească patratele perfecte de forma $a\,b\,a\,c\,d$ în care $2a = c$, iar $a\,b\,a$ este un număr prim.

SUB-LT. MARIN P. TICA-GALL

1675. — Să se determine triunghiurile dreptunghice, în numere întregi, a căror perimetru este un cub.

A. GLODEN

1485.*) — Se consideră ecuaţia,

$$x^3 + p\,x^2 + q\,x + r = 0,$$

cu două rădăcini imaginare. Se figurează în raport cu două axe perpendiculare Ox, Oy punctele imaginare M_1, M_2 ale acestor două rădăcini reale. Să se determine r şi q în funcţie de p, astfel ca triunghiul $M_1 M_2 M_3$ să fie echilateral şi patrulaterul $O M_1 M_3 M_2$ să fie un romb. Aplicaţie $3x^3 - 12x^2 + 16x - 8 = 0$.

N. ABRAMESCU

1676. — Se dă un triunghiu oarecare ABC. Pe laturile lui se iau în acelaş sens segmentele $AP = x$, $BQ = y$, $CR = z$. Se cere să se determine x, y, z aşa fel ca suprafaţa triunghiului PQR să fie minimă.

CEZAR IVANESCU

1677. — O dreaptă variabilă dusă prin punctul O, taie două drepte D_1, D_2 în M_1, M_2; paralelele din M_1, M_2 la D_2, D_1 se intersectează în N. Să se arate că locul geometric al lui N este o iperbolă de centru O cu asimptotele de direcţie D_1, D_2.

N. N. MIHAILEANU

1678. — Să se construiască un triunghiu cunoscând două laturi şi ştiind că diferenţa unghiurilor opuse lor este de 45°. Discuţie.

V. ALACI

1679. — Să se rezolve şi să se discute ecuaţiunea

$$\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{cotg}^2 x + k = 4 \cos^2 2x,$$

pentru diferitele valori ale lui k.

G L GH. BUICLIU

1680. — Să se stabilească inegalităţile:

1°. $1 + \sin^2 a \sin^2 b \geqq \sin^2 a + \sin^2 b$.

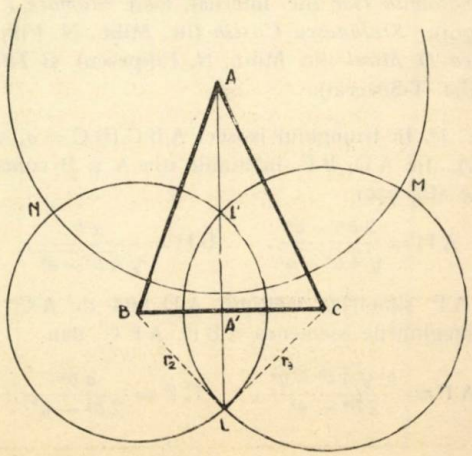
2°. $1 \leqq \sin^2 a + \sin^2 b \sin^2 c + \cos^2 a (\cos^2 b + \cos^2 c) \leqq 2$.

3°. $\sin^2 a \sin^2 b + \sin^2 c \sin^2 d + \cos^2 a \cos^2 d + \cos^2 b \cos^2 c \leqq 2$,

oricare ar fi a, b, c, d.

*) Această problemă înlocueşte pe acea cu acelaşi număr, publicată.

Erată. Aceasta este figura ce trebuia pusă în No. 2 al „R. M. T.“ la problema 1274, care din eroarea s'a omis.



Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Cristescu Dan (1574, 1659); *Diaconescu D. Ion* (P., 1597, 1603, 1608, 1664, 1667); *Jidanu I. C.* (1673); *Lepoeszky Carol* (1558, 1611, 1664, 1667); *Moldovan Cornel* (1568, 1571, 1603, 1649, 1650, 1659); *Rohr I. Alexandru* (1562, 1603, 1569, 1660, 1661, 1663, 1664); *Şâmbotin Gh.* (1182, 1195, 1206, 1213, 1262, 1268, 1379, 1413, 1414, 1422, 1423, 1445, 1493, 1548); *Segal Joe* (N); *Slavov Iacob* (1569, 1579, 1583, 1587, 1603, 1652); *Stefănescu F. Marin* (P., 1593, 1595, 1596, 1596, 1597, 1598, 1599, 1603, 1604, 1605, 1606, 1608, 1611, 1614, 1616, 1617, 1618, 1620, 1622, 1623, 1625, 1626, 1633, 1634, 1635, 1637, 1638, 1640, 1645, 1647, 1648, 1658, 1663, 1664, 1665, 1667, 1668, 1669, 1673); *Tătaru Alexandru* (P., 1579, 1603, 1620, 1668); *Topolescu I. Gheorghe* (1614, 1620); *Turcu R. Sandu* (1554, 1555, 1562, 1570, 1571, 1579, 1586, 1596, 1597, 1614, 1616, 1625, 1626, 1629).

INFORMAŢIUNI

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL XI-LEA

care a început în Martie 1938.

Costul *special* a unui abonament este de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Abonamentele se pot face la Redacţia „R. M. T."

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecţia R. M. T., anul XV, în volum şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS
1 an: Belgique, **30 fr.** France, **25 fr.**
Etranger, 7 **belgas**

Administration:
SPHINX, Bruxelles 173, Avenue Longchamp

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Rugăm pe corespondenţii nostrii, a ne trimete de urgenţă costul abonamentului de 100 (una sută) lei, pentru „R. M. T." pe anul XVIII, care a început la 15 Martie 1938.

ANUL XVIII. 15 IUNIE 1938 NO. 4.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **A. GLODEN**: SUR LES CHAINES BIGRADES.
2. **C. C. TEODORESCU**: PERMUTARI CU CONDITIUNI.
3. NOTE MATEMATICE: 6.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 264, 1291, 1584, 1619.
6. PROBLEME PROPUSE: 1681-1688.
7. INFORMATIUNI

TIMISOARA

Institutul de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVIII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVIII inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XVIII — NO. 4 TIMISOARA, 15 IUNIE 1938

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

SUR LES CHAÎNES BIGRADES

Par A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

A. On appelle *chaîne bigrade* un système diophantien de la forme

$$\begin{cases} a_1+a_2+\cdots+a_r=b_1+b_2+\cdots+b_s= \\ \qquad c_1+c_2+\cdots+c_t=\cdots \\ a_1^2+a_2^2+\cdots+a_r^2=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_s^2= \\ \qquad c_1^2+c_2^2+\cdots+c_t^2=\cdots \end{cases}$$

Nous écrirons, d'une manière abrégée,

$$(a_1,\ a_2,\ldots a_r)^x=(b_1,\ b_2,\ldots b_s)^x= \\ (c_1,\ c_2,\ldots c_t)^x\ldots,\ (x=1,2).$$

Les expressions telles que $a_1+a_2+\cdots+a_r$ s'appellent les *maillons* de la chaîne.

Procédé pour obtenir une chaîne bigrade avec 3 termes par maillon avec un nombre de chaînons fixé d'avance.

D'après un théorème général sur les égalités multigrades, l'égalité bigrade

$$(A_1,\ A_2,\ A_3)^x=(B_1,\ B_2,\ B_3)^x,\qquad (x=1,2)$$

peut être mise sous la forme

$$(a_1,\ a_2,\ -a_1,\ -a_2)^x=(b_1,\ b_2,\ -b_1,\ -b_2)^x,\quad (x=1,2)$$

de telle sorte que la somme des termes d'un maillon soit égale à 0. L'égalité ayant lieu évidemment au 1er degré, il reste la condition

$$a_1^2+a_1a_2+a_2^2=b_1^2+b_1b_2+b_2^2.$$

Cette propriété subsiste pour les chaînes bigrades. Comme ici nous ne considérons que des maillons avec 3 termes par membre, nous pourrons écrire:

$$(a_1,\ a_2,\ -a_1,\ -a_2)^x=(b_1,\ b_2,\ -b_1,\ -b_2)^x= \\ (c_1,\ c_2,\ -c_1,\ -c_2)^x=\ldots,\qquad (x=1,2).$$

Ces égalités sont évidemment satisfaites au premier degré. Au second degré, elles donnent les conditions

$$a_1^2+a_1a_2+a_2^2=b_1^2+b_1b_2+b_2^2= \\ c_1^2+c_1c_2+c_2^2=\cdots$$

Si l'on considère arbitrairement deux entiers positifs distincts, a_1 et a_2, on a toujours

$$a_1^2+a_1a_2+a_2^2=(a_1+a_2)^2+(a_1+a_2)(-a_1)+(-a_1)^2.$$

Exemple.

$$2^2+2.1+1^2=3^2+3(-2)+(-2)^2.$$

Donc

$$(2,\ 1,\ -3)^x=(3,\ -2,\ -1)^x,\qquad (x=1,\ 2).$$

Nous pouvons ajouter 4 à tous les termes, d'après un théorème général sur les égalités multigrades, et il vient

$$(6,\ 5,\ 1)^x=(7,\ 2,\ 3)^x,\qquad (x=1,\ 2)$$

ou

$$\begin{cases} 6+5+1=7+3+2 & (=12) \\ 6^2+5^2+1^2=7^2+3^3+2^2 & (=62). \end{cases}$$

On a d'ailleurs aussi, quels que soient a_1 et a_2,

$$a_1^2+a_1a_2+a_2^2= \\ (a_1+a_2)^2+(a_1+a_2)(-a_2)+(-a_2)^2,$$

mais on ne trouve pas de nouvelle égalité bigrade.

Si l'on veut avoir une chaîne proprement dite, les nombres $(a_1,\ a_2)$ ne peuvent plus être choisis arbitrairement, mais doivent constituer une solution du système

$$a_1^2+a_1a_2+a_2^2=b_1^2+b_1b_2+b_2^2= \\ c_1^2+c_1c_2+c_2^2=\cdots$$

Le nombre de chaînons peut être calculé d'avance d'après le théorème suivant:

N *étant égal à* $n^{\alpha} n'^{\beta} n''^{\gamma} \ldots$, *les nombres* n, n', n'' ... *étant tous de la forme* $a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2$ *et premiers, et* N *n'étant pas* M 3, *le nombre de maillons de la chaîne bigrade qu'on obtient avec ce nombre est égal à* $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$ .. *Si* N *est de la forme* $3^k n^{\alpha} n'^{\beta} n''^{\gamma} \ldots$, *le nombre de maillons est* $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots$, *si* k *est pair, et de* $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\cdots+1$, *si* k *est impair et si, en outre,* $n^{\alpha} n'^{\beta}, n''^{\gamma} \ldots$ *est un carré parfait.*

La démonstration résulte d'un théorème[1] que nous avons donné sur le nombre des représentations d'un nombre N de la forme $a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2$ par des nombres positifs appartenant à la même forme, et de la remarque déjà faite que toute représentation en nombres positifs (a_1, a_2) eu fournit une autre a_1+a_2, $-a_1$ (et aussi a_1+a_2, $-a_2$) et donne lieu à deux chaînons. Si l'on multiplie le nombre N par 3^k, le nombre des chaînoos n'est pas altéré, sauf *si* k *est impair et si en même temps* N *est un carré parfait.*

Nous appelons le nombre N le noyau de la chaîne.

B. Chaînes bigrades formées à partir des puissances de 7.

a. 3 maillons

$$7^2 = 7^2 + 7.0 + 0^2 = 5^2 + 5.3 + 3^2 = 8^2 + 8(-5) + (-5)^2.$$

$$(7,\ 0,\ -7)^x = (5,\ 3,\ -8)^x = (8,\ -5,\ -3)^x, \qquad (x = 1, 2),$$

et

$$(16,\ 9,\ 2)^x = (14,\ 12,\ 1)^x = (17,\ 4,\ 6)^x, \qquad (x = 1, 2)$$

$$S_1 = 27, \qquad S_2 = 341.$$

b. 4 maillons

$$7^3 = 18^2 + 18.1 + 1^2 = 19^2 + 19(-18) + (-18)^2$$
$$= 14^2 + 14\,7 + 7^2 = 21^2 + 21(-14) + (-14)^2$$

$$(18,\ 1,\ -19)^x = (19,\ -18,\ -1)^x = (14,\ 7,\ -21)^x = (21,\ -14,\ -7)^x, \qquad (x = 1,\ 2)$$
$$(40,\ 23,\ 3)^x = (41,\ 4,\ 21)^x = (36,\ 29,\ 1)^x = (43,\ 8,\ 15)^x, \qquad (x = 1,\ 2)$$

$$S_1 = 66, \qquad S_2 = 2138.$$

c. 5 maillons

$$7^4 = 49^2 + 49.0 + 0^2 = 39^2 + 39.16 + 16^2 = 55^2 + 55(-39) + (-39)^2$$
$$= 35^2 + 35.21 + 21^2 = 56^2 + 56(-35) + (-35)^2.$$

$$(49,\ 0,\ -49)^x = (39,\ 16,\ -55)^x = (55,\ -39,\ -16)^x = (35,\ 21,\ -56)^x = (56,\ -35,\ -21)^x$$
$$106,\ 57,\ 8)^x = (96,\ 73,\ 2)^x = (112,\ 18,\ 41)^x = (92,\ 78,\ 1)^x = (113,\ 22,\ 36)^x \qquad (x = 1, 2).$$

$$S_1 = 171, \qquad S_2 = 14.549.$$

d. 6 maillons

$$7^5 = 87^2 + 87.62 + 62^2 = 149^2 + 149(-87) + (-87)^2$$
$$= 98^2 + 98.49 + 49^2 = 147^2 + 147(-98) + (-98)^2$$
$$= 126^2 + 126.7 + 7^2 = 133^2 + 133(-126) + (-126)^2$$

$$(87,\ 62,\ -149)^x = (149,\ -87,\ -62)^x = (98,\ 49,\ -147)^x =$$
$$(147,\ -98,\ -49)^x = (126,\ 7,\ -133)^x = (133,\ -126,\ -7)^x \qquad (x = 1, 2)$$

et

$$(237,\ 212,\ 1)^x = (299,\ 63,\ 88)^x = (248,\ 199,\ 3)^x =$$
$$(297,\ 52,\ 101)^x = (276,\ 157,\ 17)^x = (283,\ 24,\ 143)^x \qquad (x = 1, 2)$$

$$S_1 = 450, \qquad S_2 = 101.114.$$

[1] Revista Matematica din Timişoara, 1938, Anul XVII, page 132.

e. 7 maillons

$$7^6 = 343^2 + 343.0 + 0^2 =$$
$$= 323^2 + 323.37 + 37^2 = 360^2 + 360(-323) + (-323)^2$$
$$= 245^2 + 245.147 + 147^2 = 392^2 + 392(-245) + (-245)^2$$
$$= 273^2 + 273.112 + 112^2 = 385^2 + 385(-273) + (-273)^2.$$

$$(343, \quad 0, \quad -343)^x =$$
$$(323, \quad 37, \quad -360)^x = (360, \quad -323, \quad -37)^x = (245, \quad 147, \quad -392)^x = \qquad (x = 1, 2)$$
$$(392, \quad -245, \quad -147)^x = (273, \quad 112, \quad -385)^x = (385, \quad -273, \quad -112)^x$$

$$(736, \quad 393, \quad 50)^x =$$
$$(716, \quad 430, \quad 33)^x = (753, \quad 70, \quad 356)^x = (638, \quad 540, \quad 1)^x = \qquad (x = 1, 2)$$
$$(785, \quad 148, \quad 246)^x = (666, \quad 505, \quad 8)^x = (778, \quad 120, \quad 281)^x.$$

$$S_1 = 1.179, \qquad S_2 = 698{,}645.$$

f. 8 maillons

$$7^7 = 757^2 + 757.249 + 249^2 = 1006^6 + 1006(-757) + (-757)^2$$
$$609^2 + 609.434 + 434^2 = 1043^2 + 1043(-609) + (-609)^2$$
$$686^2 + 686.343 + 343^2 = 1029^2 + 1029(-686) + (-686)^2$$
$$882^2 + 882.49 + 49^2 = 931^2 + 931(-882) + (-882)^2.$$

$$(757, \quad 249, \quad -1006)^x = (1006, \quad -757, \quad -249)^x = (609, \quad 434, \quad -1043)^x = (1043, \quad -609, \quad -434)^x = \qquad (x = 1, 2)$$
$$(686, \quad 343, \quad -1029)^x = (1029, \quad -686, \quad -343)^x = (882, \quad 49, \quad -931)^x = (931, \quad -882, \quad -49)^x.$$

$$(1801, \quad 1293, \quad 38)^x = (2050, \quad 287, \quad 795)^x = (1653, \quad 1478, \quad 1)^x = (2087, \quad 435, \quad 610)^x = \qquad (x = 1, 2)$$
$$(1730, \quad 1387, \quad 15)^x = (2073, \quad 358, \quad 701)^x = (1926, \quad 1093, \quad 113)^x = (1975, \quad 162, \quad 995)^x.$$

$$S_1 = 3132, \qquad S_2 = 4.916.894.$$

g. 9 maillons

$$7^8 = 2401^2 + 2401.0 + 0^2 =$$
$$2261^2 + 2261.259 + 259^2 = 2520^2 + 2520(-2261) + (-2261)^2 =$$
$$1715^2 + 1715.1029 + 1029^2 = 2744^2 + 2744(-1715) + (-1715)^2 =$$
$$1911^2 + 1911.784 + 784^2 = 2695^2 + 2695(-1911) + (-1911)^2 =$$
$$1504^2 + 1504.1265 + 1265^2 = 2769^2 + 2769(-1504) + (-1504)^2.$$

$$(2401, \quad 0, \quad -2401)^x =$$
$$(2261, \quad 259, \quad -2520)^x = (2520, \quad -2261, \quad -259)^x =$$
$$(1715, \quad 1029, \quad -2744)^x = (2744, \quad -1715, \quad -1029)^k = \qquad (x = 1, 2)$$
$$(1911, \quad 784, \quad -2695)^x = (2695, \quad -1911, \quad -784)^x =$$
$$(1504, \quad 1265, \quad -2769)^x = (2769, \quad -1504, \quad -1265)^x.$$

$$(5171, \quad 2770, \quad 369)^x =$$
$$(5031, \quad 3029, \quad 250)^x = (5290, \quad 509, \quad 2511)^x =$$
$$(4485, \quad 3799, \quad 26)^x = (5514, \quad 1055, \quad 1741)^x = \qquad (x = 1, 2)$$
$$(4681, \quad 3554, \quad 75)^x = (5465, \quad 859, \quad 1986)^x =$$
$$(4274, \quad 4035, \quad 1)^x = (5539, \quad 1266, \quad 1505)^x =$$

$$S_1 = 8310, \qquad S_2 = 34.548.302.$$

C. *Autres exemples.* a. $N = 3.7^2.19^2$ donne $(2+1)(2+1)+1 = 10$ chaînons.

$$N = 133^2 + 133.133 + 133^2 = 266^2 + 266(-133) + (-133)^2$$
$$218^2 + 218.29 + 23^2 = 241^2 + 241(-218) + (-218)^2$$
$$209^2 + 209.38 + 38^2 = 247^2 + 247(-209) + (-209)^2$$
$$182^2 + 182.77 + 77^2 = 259^2 + 259(-182) + (-182)^2$$
$$166^2 + 166.97 + 97^2 = 263^2 + 263(-166) + (-166)^2.$$

$$(133,\ 133,\ -266)^x = (266,\ -133,\ -133)^x$$
$$(218,\ 23,\ -241)^x = (241,\ -218,\ -23)^x$$
$$(209,\ 38,\ -247)^x = (247,\ -209,\ -38)^x$$
$$(182,\ 77,\ -259)^x = (259,\ -182,\ -77)^x$$
$$(166,\ 97,\ -263)^x = (263,\ -166,\ -97)^x.$$
$$(x = 1, 2)$$

$$(400,\ 400,\ 1)^x = (533,\ 134,\ 134)^x$$
$$(485,\ 290,\ 26)^x = (508,\ 49,\ 244)^x$$
$$(476,\ 305,\ 20)^x = (514,\ 58,\ 229)^x$$
$$(449,\ 344,\ 8)^x = (526,\ 85,\ 190)^x$$
$$(433,\ 364,\ 4)^x = (530,\ 101,\ 170)^x$$
$$(x = 1, 2)$$

$$S_1 = 801, \qquad S_2 = 320.001.$$

b. $N = 36309 = 3.7^2.13.19$ donne $(2+1)(1+1)(1+1) = 12$ maillons.

$$175^2 + 175.28 + 28^2 = 203^2 + 203(-175) + (-175)^2 =$$
$$140^2 + 140.77 + 77^2 = 217^2 + 217(-140) + (-140)^2 =$$
$$113^2 + 113.107 + 107^2 = 220^2 + 220(-113) + (-113)^2 =$$
$$188^2 + 188.5 + 5^2 = 193^2 + 193(-188) + (-188)^2 =$$
$$148^2 + 148.67 + 67^2 = 215^2 + 215(-148) + (-148)^2 =$$
$$(157^2 + 157.55 + 55^2 = 212^2 + 212(-157) + (-157)^2.$$

On a ensuite

$$(175,\ 28,\ -203)^x = (203,\ -175,\ -28)^x =$$
$$(140,\ 77,\ -217)^x = (217,\ -140,\ -77)^x =$$
$$(113,\ 107,\ -220)^x = (220,\ -113,\ -107)^x =$$
$$(188,\ 5,\ -193)^x = (193,\ -188,\ -5)^x =$$
$$(148,\ 67,\ -215)^x = (215,\ -148,\ -67)^x =$$
$$(157,\ 55,\ -212)^x = (212,\ -157,\ -55)^x$$
$$(x = 1, 2)$$

et, en nombres tous positifs,

$$(18,\ 249,\ 396)^x = (46,\ 193,\ 424)^x =$$
$$(4,\ 298,\ 361)^x = (81,\ 144,\ 438)^x =$$
$$(1,\ 328,\ 334)^x = (108,\ 114,\ 441)^x =$$
$$(28,\ 226,\ 409)^x = (33,\ 216,\ 414)^x =$$
$$(6,\ 288,\ 369)^x = (73,\ 154,\ 436)^x =$$
$$(9,\ 276,\ 378)^x = (64,\ 166,\ 433)^x.$$
$$(x = 1, 2)$$

$$S_1 = 663, \qquad S_2 = 219.141.$$

c. Le noyau $7^3.13^3.19^3$ par exemple donne une chaîne bigrade avec $(3+1)(3+1)(3+1) = 64$ maillons

PERMUTĂRI CU CONDIȚIUNI

De C. C. Teodorescu

Intr'o revistă pentru copii și tineret s'a publicat următorul joc, intitulat jocul silabelor.

Formați din silabele de mai jos 10 cuvinte. Fiecare cuvânt are patru litere, adică două silabe. O silabă se poate repeta o singură dată.

ZA, NA, TA, LA, CA, GA, FA, PA, BA, RA

BU, LU, ȘI, PI, NU, RU, CO, SA, TO, SO.

Se vede ușor că este vorba de o aranjare a acestor silabe, două câte două, în așa fel în cât să aibă un înțeles, să formeze un cuvânt în limba românească. Avem 20 silabe și putem să facem numeroase combinațiuni între ele. Dintre acestea numai unele ar răspunde la problema noastră. Dar cum putem alege aceste combinații, și să aflăm o soluție și câte soluții are problema?

Problema este interesantă și ne duce la o examinare a cunoștințelor de permutări între mai multe elemente, supuse la diferite condițiuni.

Se știe că se numește cu numele de permutări de m obiecte, numărul de grupe ce se pot face, așa fel ca fie-care grup să difere de altul prin ordinea obiectelor. Astfel cu două obiecte a, b se pot forma două grupuri ab și ba. Avem deci $P_2 = 2$. Dacă avem trei obiecte abc, se vede că în primul grup obiectul c poate ocupa trei poziții cab, acb, abc, de asemenea în al doilea, deci $P_3 = 2 \times 3$. Și astfel în mod general se poate scrie $P_m = 1.2.3.4 \ldots m$, adică produsul primelor m numere

Numărul de permutări pe care putem să-l facem cu cele 20 silabe date este $P_{20} = 1.2.3 \ldots . 20$ care este un număr cu 19 cifre.

Dacă însă punem anumite condițiuni formării acestor grupe, atunci numărul permutărilor scade. Cu cât condițiile vor fi mai grele, cu atât numărul permutărilor este mai mic.

Exemplu. Avem cinci litere $abcde$. Numărul permutărilor ce pot face este

$$P_5 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.$$

Câte din aceste grupe se termină cu două vocale?

Singurele două vocale sunt a și e, care deci pot să apară în două combinațiuni ae și ea. Celelalte trei litere, consoanele bcd, pot să aibă or-ce grupare cu condiția să rămâe la început. Numărul de permutări ce se poate face cu aceste trei litere este $P_3 = 1 \times 2 \times 3 = 6$ deci $6 \times 2 = 12$ grupe se vor termina cu două vocale.

Câte din grupele ce putem forma se termină cu o vocală?

Vocala poate fi a sau e. Celelalte patru litere pot forma $P_4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ permutări. Vom avea deci $24 \times 2 = 48$ grupe care se termină cu o vocală.

Putem varia astfel condițiile în diferite moduri.

Exemplu. Cu cele cinci cifre 1, 2, 3, 4, 5 se pot forma $P_5 = 120$ numere diferite de câte cinci cifre. Câte din acestea vor fi perechi?

Observăm că avem două cifre pereche 2 și 4 cu care trebue să se termine numărul nostru de cinci cifre. Deci celelalte patru cifre le putem permuta în voe obținând $P_4 = 24$ cazuri. Pentru cele două cifre pereche avem $2 \times 24 = 48$ cazuri.

Câte din aceste numere vor fi neperechi?

Același raționament îl facem observând că avem trei cifre neperechi 1, 3, 5, la care celelalte patru cifre pot ocupa or-ce poziție, deci $3 P_4 = 3 \times 24 = 72$.

Suma lor face cum și trebuia 120, căci numerele pot fi ori perechi, ori neperechi, deci

$$2 P_4 + 3 P_4 = 5 P_4 = P_5.$$

Câte din numerele astfel obținute vor fi divizibile cu 5? Pentru aceasta trebue ca numărul să se termine cu 5, deci celelalte patru cifre pot fi permutate or-cum și avem $P_4 = 24$.

Exemplu. Se dau cele zece cifre cunoscute 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Prin permutări se formează toate numerile cu 10 cifre. Impărțind acest număr în părți de câte două cifre, să se afle câte combinații se pot face în care aceste părți să fie numere pare.

Numărul permutărilor ce se pot face cu zece cifre este $P_{10} = 10! = 3.628.800$. Dacă vrem să alegem combinațiile ce răspund la problemă trebue să găsim pe acelea, care la cifrele de rang par, arată cifrele pare 0, 2, 4, 6, 8.

Avem cinci cifre care ne dau $P_5 = 5! = 120$ permutări. Pentru fie-care din acestea, cifrele ce ocupă rangul impar și care sunt 1, 3, 5, 7, 9, pot ocupa toate permutările posibile, adică $P_5 = 5!$

Deci vom avea în total $P_5^2 = 5!5! = 14400$ permutări care au părţile din numere pare. De exemplu 1032547698.

Acelaş raţionament ne conduce la rezultatul că sunt 14400 permutări care au părţile compuse din numere impare. De exemplu 8967452301.

Restul de 3.600.000 sunt permutări în care se întâlnesc în mod mixt, părţi terminate cu numere pare şi cu numere impare.

Exemplu. Să punem o altă condiţie, care este mai greu de exprimat. Să facem permutarea celor zece cifre aşa fel, ca impărţind în părţi de câte două cifre să avem numai numere prime.

In acest caz nu mai avem vre-o regulă, căci din aranjările ce se pot forma cu câte două cifre, numai unele sunt prime. Utilizând seria numerelor prime se poate forma următorul tablou,

	01	02	03	—	05	—	07	—	—
—		—	13		—	—	17	—	19
—	—		23	—	—	—	—	—	9
—	31	—		—	—	—	37	—	—
—	41	—	—		—	—	47	—	—
	—	—	53	—		—	—	—	9
—	61	—	—	—	—		67	—	—
—	71	—	73	—	—	—		—	79
—	—	—	83	—	—	—	—		89
—	—	—	—	—	—	—	97	—	

din care lipseşte 11, format prin repetarea cifrei 1.

Observăm că fie-care aranjare nu poate întra de cât o singură dată, căci prin alegerea celor două cifre am exclus celelalte aranjări în care aceste cifre mai pot intra. La fie-care alegere excludem deci două linii şi două coloane.

Dacă liniile şi coloanele ar fi complete, am putea desvolta pe rând după elementele liniilor şi coloanelor, făcând toate combinaţiile posibile. Aci însă este indicat să pornim de la acea combinaţie, care exclude mai puţine, adică aceea care intră prin cifrele ei în mai puţine altele. Acestea sunt 02 şi 05.

Grupând liniile şi coloanele în alt mod, se va vedea uşor combinaţiile ce se pot face

					02				
					05				
		83	23	53	03			73	13
		89	29	59				79	19
67	47				07	37	97		17
61	41				01	31		71	

Desvoltând după 02 vom suprima coloanele şi liniile conţinând aceste cifre. Urmează 67 şi 61. Pentru 67 prin suprimare obţinem 41 după care urmează 59, 83. Dacă alegem 61, atunci obţinem 47, după care urmează 53, 89. Deci

$$67 - 41 \mid 02 - 59 - 83$$
$$61 - 47 \mid 02 - 53 - 89,$$

în total patru combinaţiuni.

Tot aşa se poate porni de la acelaş cuplu 67—41, combinând cu 05 şi avem

$$67 - 41 \mid 05 - 23 - 89$$
$$61 - 47 \mid 05 - 29 - 83.$$

Soluţiile se pot uşor urmări, tăind nişte fâşii de hârtie cu care să acoperim linia şi coloana din care am ales aranjarea, excluzând astfel pe celelalte.

Avem deci în total 8 permutări, din care prin permutarea perechilor de cinci cifre putem să obţinem $8 P_5 = 960$ grupuri care răspund la problema noastră.

Se vede că numai aceste aranjamente pot intra în discuţie şi că celelalte numere prime nu pot lua parte. Astfel, dacă am porni de la 73 de exemplu, am exclus tot şirul ce are cifra 7 şi 3, şi ne-a rămas numai combinaţii cu 9 şi 1, care nu ne mai sunt suficiente pentru a completa cele cinci perechi de cifre ce ni se cer.

Nu toate numerile din tablou pot deci intra în permutări, din cauza condiţiilor enunţului.

Prin punerea acestei condiţii foarte severe numărul de permutări care răspunde la problemă s'a redus foarte mult.

Am ajuns acum să avem elementele pentru a ataca problema pusă la început. Vom forma un tablou aşezând în coloane şi linii silabele date şi completând acele aranjamente de două silabe care au un înţeles în limbă, celelalte locuri rămânând goale.

	SO	CO	RU	NU	TO	LU	BU	PA	PI	BA	SA	FA	GA	NA	RA	LA	TA	CA	ŞI	ZA
SO										SOBA					SORA					
CO												COFA					COTA	COCA		
RU												RUFA	RUGA						RUŞI	
NU														NUNA		NULA		NUCA		
TO										TOBA				TONA	TORA					
LU								LUPA	LUPI					LUNA				LUCA		
BU										BUBA				BUNA		BULA		BUCA	BUŞI	BUZA
PA									PAPI					PANA	PARA		PATA		PAŞI	PAZA
PI											PISA					PILA	PITA	PICA		
BA													BAGA		BARA					BAZA
SA								SAPA		SABA			SAGA		SARA	SALA		SACA	SAŞI	
FA																FALA	FATA			FAZA
GA												GAFA			GARA	GALA	GATA			
NA									NAPI						NARA				NAŞI	
RA																	RATA		RAŞI	RAZA
LA										LABA							LATA		LAŞI	
TA							TABU													
CA														CANA						
ŞI																				
ZA																				

Sunt o serie de de permutări de silabe, care au senz în limbă şi care nu au fost trecute de cât o singură dată. Astfel sunt

NARA→RANA, RATA→TARA, SACA→CASA,

SARA→RASA, NAŞI→ŞINA, PAPI→PIPA,

RAŞI→ŞIRA,

care dublează numărul permutărilor în care întră.

Formăm astfel alăturatul tablou în care ordinea dată a silabelor a fost schimbată pentru a răspunde la o desvoltare mai uşoară. Se vede că multe combinaţiuni de silabe nu se pot face ceeace micşorează cu mult numărul permutărilor posibile. Avem în total 62 cuvinte.

Pentru desvoltarea acestui tablou este indicat să pornim de la combinaţiile care intră în mai puţine altele. Chiar în această ordine au fost aşezate, aşa în cât în această ordine vom face şi desvoltarea.

Soluţiile se pot urmări, tăind fâşii de hârtie cu care acoperim liniile şi coloanele din care am ales silabele şi care astfel exclud pe celelalte.

O serie de soluţii sunt date aci mai jos în ordinea desvoltării după liniile tabloului.

SOBA COFA RUGA NUNA TORA LUPA BUZA PITA SACA LAŞI

PICA LATA SAŞI

LUPI BUCA PAZA LATA SAŞI

	BUŞI	PAZA	LATA	SACA
LUCA	BULA	PAZA	PITA	SAŞI
	TABU	PAZA	PILA	SAŞI
	BUŞI	PAZA	PITA	SALA
	BUZA	PATA	PILA	SAŞI
SORA COFA RUŞI NUNA TOBA	LUPA	BUZA	PICA	SAGA LATA
	LUPI	BULA	PAZA	SACA GATA
	LUCA	BULA	PAZA	PISA GATA
	BUZA	SAPA	PILA	GATA

Câte soluţii se pot găsi?

Atârnă de răbdarea fie-căruia să încerce câte poate găsi In or-ce caz numărul lor va fi mult mai redus de cât acel al permutărilor libere, căci precum se vede în tablou sunt multe locuri goale, care nu ne dau cuvânt.

Concluzie. Un joc distractiv ne-a dus la calculul permutărilor. Acest calcul al permutărilor serveşte în algebră la numeroase probleme. Tabloul format de noi îşi găseşte aplicări în problemele de determinanţi şi de matriţe, instrumente de calcul foarte importante în matematicile superioare.

NOTE MATEMATICE

6. — *Observări asupra identităţilor simultane.*

Observare preliminară. Simbolul $\overset{n}{=}$ însemnează egalitate de sume de puteri pentru diferiţi exponenţi n. Astfel:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5 \overset{n}{=} b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ (n=1,2,3)$$

înseamnă sistemul:

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=b_1+b_2+b_3+b_4+b_5 \\ a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2+b_5^2 \\ a_1^3+a_2^3+a_3^3+a_4^3+a_5^3=b_1^3+b_2^3+b_3^3+b_4^3+b_5^3 \end{cases}$$

I. Voim să arătăm acum câteva teoreme pe care le-am găsit relativ la identităţile simultane.

a. *Dacă există relaţia,*

$$a,\ b,\ c \overset{n}{=} d,\ e,\ f, \qquad (n=1,\ 2),$$

atunci există o anumită valoare pentru x, pentru care avem de asemenea.

$$(a\,x-d),\ (b\,x-e),\ (c\,x-f) \overset{n}{=} (d\,x-a),\ (e\,x-b),\ (f\,x-c),$$ pentru $n=1,2$.

Exemplu:

$$1,\ 8,\ 15 \overset{n}{=} 3,\ 5,\ 16, \qquad \text{pentru } n=1,2,$$

conduce la $x=3$ şi avem de asemenea:

$$8,\ 7,\ 33 \overset{n}{=} 19,\ 29,\ (n=1,2).$$

b. *Dacă*

$$A,\ B,\ C \overset{n}{=} D,\ E,\ F, \qquad \text{pentru } n=2,\ 4,$$

unde $A+B=C$ *şi* $D+E=F$, *atunci pentru un anumit x avem de asemenea:*

$$(A\,x-D),\ (B\,x-E),\ (C\,x-F) \overset{n}{=} (D\,x-A),\ (E\,x-B),\ (F\,x-C), \qquad \text{pentru } n=2,4.$$

Exemplu.

$$1,\ 9,\ 10 \overset{n}{=} 5,\ 6,\ 11, \qquad (n=2,\ 4)$$

conduce pentru $x=5$ la identităţile:

$$39^2+39^2=24^2+21^2+45^2$$
$$39^4+39^4=24^4+21^4+45^4.$$

c. *Avem evident valabile identităţile simultane:*

$$\begin{cases} y\,x+y\,x+(x^2+y^2)=y^2+2\,y\,x+x^2=(x+y)^2 \\ (y\,x)^2+(y\,x)^2+(x^2+y^2)^2=(y^2)^2+(2\,y\,x)^2+(x)^2. \end{cases}$$

d. *Avem şi identităţile simultane:*

$$\begin{cases} (3\,Q)^2=3\,[-Q^2+4\,Q^2] \\ (3\,Q)^4=9\,[(-Q)^4+8\,Q^4]. \end{cases}$$

Exemplu. Pentru $Q=7$, avem:

$$21^2=3\,[-7^2+4.7^2]$$
$$21^4=9\,[(-7)^4+8.7^4].$$

II. Dăm aci alte câteva noui identităţi simultane.

a. Relativ la identităţile,

$$M_1,\ M_2,\ M_3,\ldots,M_{14} \overset{n}{=} P_1,\ P_2,\ P_3,\ldots,P_{14},$$

pentru $n=1, 2, 3,\ldots,9$, am dat deja soluţia cunoscută, (Cf. *Alfred Moessner* şi *Werner Schultz:* „Über Potenzsummen ganzer rationaler Zahlen in „Mathematische Zeitschrift", 1936, p. 343). Aci voim să adaogăm încă următoarele soluţii:

Pentru un anumit t avem identităţile:

$$(t-37),\ (t-36),\ (t-25),\ (t-21),\ (t-17),$$
$$(t-6),\ (t-2),\ (t+2),\ (t+6),\ (t+17),\ (t+21),$$
$$(1)\quad (t+25),\ (t+36),\ (t+37)\overset{n}{=}(t-38),\ (t-34),$$
$$(t-28),\ (t-19),\ (t-15),\ (t-9),\ (t-3),\ (t+3),$$
$$(t+9),\ (t+15),\ (t+19),\ (t+28)\ (t+34),\ (t+38),$$

pentru $n=1, 2, 3,\ldots,9$.

$$(t-40),\ (t-39),\ (t-28),\ (t-23),\ (t-11),\ (t-9),$$
$$(t-8),\ (t+8),\ (t+9),\ (t+11),\ (t+23),$$
$$(2)\quad (t+28),\ (t+39),\ (t+40)\overset{n}{=}(t-41),\ (t-27),\ (t-21),$$
$$(t-17),\ (t-16),\ (t-12),\ (t-0),\ (t+0),\ (t+12),$$
$$(t+16,\ (t+17),\ (t+21),\ (t+27),\ (t+41),$$

pentru $n=1, 2, 3,\ldots,9$.

$$(t-43),\ (t-39),\ (t-34),\ (t-25),\ (t-16),\ (t-7),\ (t-2),$$
$$(t+2),\ (t+7),\ (t+16),\ (t+25),\ (t+34),\ (t+39),$$
$$(3)\quad (t+43)\overset{n}{=}(t-42),\ (t-41),\ (t-32),\ (t-26),$$
$$(t-17),\ (t-5),\ (t-1),\ (t+1),\ (t+5),\ (t+17),$$
$$(t+26),\ (t+32),\ (t+41),\ (t+42),$$

pentru $n=1, 2, 3\ldots,9$.

III. La soluţia cunoscută pentru identităţile,

$$U_1,\ U_2,\ U_3,\ldots,U_{18} \overset{n}{=} V_1,\ V_2,\ V_3,\ldots,V_{18},$$

pentru $n=1, 2, 3,\ldots,11$. (Cf. *Moessner* şi *Schulz*: „Über Pontenzsummen ganzer rationaler Zahlen".) mai dăm aci încă următoarea soluţie:

Pentru un anumit t avem identităţile

$$(t-65),\ (t-64),\ (t-53),\ (t-49),\ (t-29),\ (t-24),$$
$$(t-22),\ (t-18),\ (t-6),\ (t+6),\ (t+18),\ (t+22),$$
$$(t+24),\ (t+29),\ (t+49),\ (t+53),\ (t+64),$$
$$(t+65)\overset{n}{=}(t-66),\ (t-62),\ (t-56),\ (t-46),\ (t-31),$$
$$(t-27),\ (t-16),\ (t-15),\ (t-13),\ (t+13),\ (t+15),\ (t+16),$$
$$(t+27),\ (t+31),\ (t+46),\ (t+56),\ (t+62),\ (t+66),$$

pentru $n=1, 2, 3,\ldots,11$.

ALFRED MOESSNER
(Nürnberg)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLIII, No. 9, Mai 1938. Architecturae militaris tyrocinium a lui *E. Vols*, de *Victor Marian*. Aritmetica lui *Gheorghe Asachi* (urmare), de *P. Z. Cazanacli*. Convergenţa seriilor cu termenii pozitivi, de *M. Ghermănescu*. O reţea de conice, de Lt. *Mihail I. Focşeneanu*. Note matematice Chestiuni de examen. Probleme rezolvate şi propuse.

2. *Boletin Matematico*, Anul XI, No. 4, Aprilie 1938, Buenos Aires. Notă asupra cochleoidei, de *N. N. Mihăileanu*. Rezolvirea în numere întregi a sistemului diofantian: $x^3+t=u^3$, $y^3+t=v^3$, de *A. Gloden*. Probleme rezolvate şi propuse.

3. *Sphinx*, anul VIII, No. 6, Iunie 1938. Les premiers essais de nomenclature lunaire, par *Pierre Humbert*. Le postulat *d'Euclide*, par *A. Decerf*. Quelques Jeux, par *M. Godron*. Sur la résolution en nombres entiers de l'équation, $x^{2\alpha}+y^{2\alpha}=z^2+t^2$, $(\alpha>1)$ et du système diophantien, $x^{2\alpha}+y^{2\alpha}=z_1^2+t_1^2=z_2^2+t_2^2=\cdots=z_n^2+t_n^2$, par *A. Gloden*.

4. *Stiinţă şi Progres, Revista ştiinţifică a liceelor militare*, anul IV, N-rile 10—11, Mai 1938. Petrolul şi Apărarea Noastră Naţională, de Prof. *George Janet*. Cum trebuie citită o carte de ştiinţă, de Prof. *Eugen Rusu*. Lumina vie, de *Christian Tomescu*. Douăzeci de ani dela moartea *Dr. C. I. Istrati*, de *Munteanu V. Lazăr*. Aviaţia civilă română de *Centea Zeno*. Noutăţi. Publicaţii noui. Probleme rezolvate şi propuse.

5. *Buletin*, Revista Cercului de studii şi a Asociaţiei absolvenţilor şcoalei superioare P. T. T., Timişoara, anul VII, No. 5 (litografiat). Cuprinde articole de specialitate.

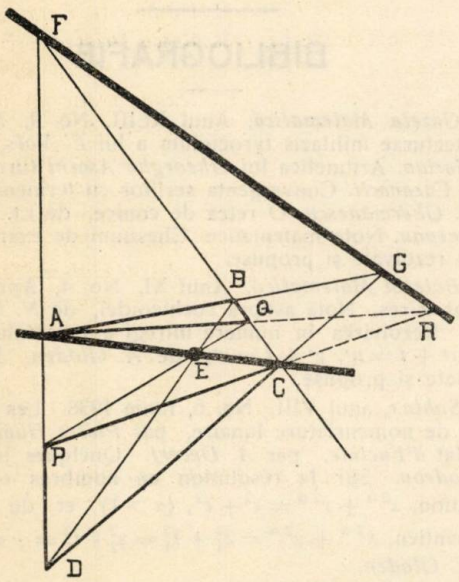
6. *Th. Anghelutza*. Une démonstration nouvelle du théorème: Une fonction, dont la dérivée est nulle dans un intervalle, a la même valeur dans cet intervalle. (Extrait du Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées, de L'École Polytechnique „Roi Carol II", Bucarest, IX année (1937 – 1938).

PROBLEME REZOLVATE

264. — *Se dă un patrulater* A B C D *şi o dreaptă ce trece prin punctul de întâlnire* E *al diagonalelor şi taie laturile* A D *şi* B C *in* P *şi* Q. *Să se găsească locul geometric al intersecţiei dreptelor* A Q, C P *când* P Q *se roteşte în jurul lui* E.

O. GH. POPEA

Soluție geometrică. Dreptele A C, B D, P Q care unesc vârfurile triunghiurilor A B Q și P C D fiind concurente în E, triunghiurile sunt omologice și deci laturile lor omologice se întâlnesc în 3 puncte colineare. Rezultă că punctele F (Q B, D A), G (A B, D C), R (A Q, P C) sunt colineare. Cum F și G sunt fixe, punctul R descrie dreapta F G.



Când P și Q vin în A și C, punctul R este ori care punct al dreptei A C.

Generalizare. Când E este un punct oare care din plan, locul lui R este o conică circumscrisă triunghiului F C A. Luăm triunghiul F C A ca triunghiu de referință și fie C (1, 0, 0), F (0, 1, 0), A (0, 0, 1), G (x_1, y_1, z_1), D $(0, y_1, z_1)$, B $(x_1, y_1, 0)$, E (x_0, y_0, z_0).

Dreapta

$$m\alpha + n\beta + \gamma = 0,$$

care trece prin E, taie pe B C și A D în Q $(n, -m, 0)$, P $(0, 1, -n)$. Ecuațiile dreptelor A Q, C P fiind

$$\alpha m + \beta n = 0,$$

$$\beta n + \gamma = 0,$$

locul lui R se obține eliminând pe m și n între aceste ecuații și

$$m x_0 + n y_0 + z_0 = 0.$$

Se obține

$$y_0 \beta\gamma - \alpha\gamma y_0 + \alpha\beta z_0 = 0,$$

care este o conică ce trece prin punctele F, C, A.

Dacă E este intersecția (A C, B D), coordonatele lui vor fi $(x_1, 0, -z_1)$, iar ecuația locului devine

$$\beta(\gamma x_1 - \alpha z_1) = 0,$$

adică dreptele C A și F G.

Această soluție și generalizare este redijată după soluția trimisă de d-l *Tib. Popoviciu* la 26 Iulie 1923, când era elev în cl. VIII a liceului din Arad.

S-au primit bune soluții geometrice asemănătoare de la d-nii: *Berdan C.* (Bârlad), *Goldștein I.* (Bârlad), *Ionescu I. Paul*, *Katz P.* (Galați), *Mihăileanu N. N.* (Constanța), *Nestor G. D.* (București), *Silion Gh. I.* (Brașov), *Simionescu D. Gh.*, *Smigelschi Oct.*, *Tăraș V.* și *Vasiliu C. I.*

S-au primit bune soluții analitice de la d-nii: *Bărglăzan N. A.*, *Goldstein I.*, *Grofșorean I. Gh.*, *Mihăileanu N. N.*, *Râmniceanu I. Cr.*, *Stamatiu M.* și *Tărăbuță C. P.*

1291. — *Intr-un patrulater* A B C D, *punctele* C *și* B *sunt fixe, iar* A, D *precum și intersecția* I *a diagonalelor descriu trei drepte paralele între ele. Se cere:*

1°. *Să se arate că latura* A D, *trece printr'un punct fix.*

2°. *Locul geometric al intersecției dreptelor* A B *și* C D.

GH D. SIMIONESCU

Soluția. 1°. Triunghiul I B C, tăiat de transversala A D, dă

$$\frac{DI}{DB} \cdot \frac{FB}{FC} \cdot \frac{AC}{AI} = 1. \tag{1}$$

De oare ce I, A, D se deplasează pe drepte paralele, iar B și C sunt fixe, rapoartele

$$\frac{DI}{DB} \quad \text{și} \quad \frac{AC}{AI}$$

sunt constante. Rezultă din (1) că

$$\frac{FB}{FC} = Const.$$

deci *punctul* F, *prin care trece* A D, *este fix.*

2°. Fie E intersecția dreptelor A B și C D și F' intersecția lui E I cu B C. Din construcție se vede că F' este conjugatul armonic al lui F față de B și C, deci F' *este fix.*

Triunghiul D B C taiat de transversala D B C dă

$$\frac{ED}{EC} \cdot \frac{F'C}{F'B} \cdot \frac{IB}{ID} = 1.$$

Rapoartele $\frac{F'C}{F'B}, \frac{IB}{ID}$ fiind constante, pentru motivele de la 1°, rezultă că

$$\frac{ED}{EC} = \text{Const.}$$

şi cum C este fix, iar D descrie o dreaptă, E va descrie o dreaptă paralelă cu locul lui D.

Bune soluţii analoage de la d-nii: *M. C. Postelnicescu* şi *I. I. Ţiţeica* (lic. Mânăştirea Dealului).

Soluţie analitică de la d-l *M. F. Amărăşteanu.*

1584. — *Se dă expresia:*

$$E = \frac{\cos^2 a}{(1+\sin a)^2} + \frac{3(1-\sin a)}{\cos a} + 2.$$

Să se exprime E cu ajutorul lui

$$x = \operatorname{tg}\left(45 - \frac{a}{2}\right)$$

şi să se arate că:

$$E(x) = (x+1)(x+2).$$

SUB LT D. TUTUNARU

Din identitatea,

$$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a,$$

deducem:

$$(1) \qquad \frac{\cos a}{1+\sin a} = \frac{1-\sin a}{\cos a}.$$

Dar avem evident:

$$\frac{\cos a}{1+\sin a} = \frac{\cos^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{a}{2}}{\sin^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{a}{2} + 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}} =$$

$$\frac{\cos^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{a}{2}}{\left(\cos\frac{a}{2} + \sin\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\cos\frac{a}{2} - \sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2} + \sin\frac{a}{2}} =$$

$$\frac{1 - \operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{a}{2}} = \operatorname{tg}\left(45 - \frac{a}{2}\right) = x.$$

Relaţia (1) devine astfel:

$$\frac{\cos a}{1+\sin a} = \frac{1-\sin a}{\cos a} = x.$$

Ţinând seamă de aceste relaţii, expresia din enunţ devine:

$$E(x) = x^2 + 3x + 1 = (x+1)(x+2).$$

Soluţii date de d-nii: *Aman C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Andonie Şt. Mihai* (Şc. Polit., Bucureşti), *Andrievici N.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Andrunachievici Al. Vladimir* (student, Iaşi), *Berinde Titus* (Şc. Polit., Timişoara), *Buznea D. Dinu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Cetăţeanu Stelian* (lic. Şincai, Bucureşti), *Dăscălescu Hristache* (Focşani), *Diaconescu D. Ion* (lic. T-Severin), *Florescu Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Jipa C. Alexandru* (lic. Milit., Iaşi), *Lepoeszky Carol*, *Matei D. D-tru* (Iaşi), *Modâlcă S. Emil* (lic. T-Severin), *Motăş Camil* (lic. Internat, Iaşi), *Murgu V. Marţian* (Şc. Polit., Timişoara), *Petrescu C. Alin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Petrescu P. Benone* (lic. Milit., N. Filipescu), *Popescu-Zorica N. Alexandru* (Bucureşti), *Popoviciu Gabriel* (Şc. Polit., Bucureşti), *Rădulescu Octavian*, *Reicher Herman* (lic. Internat, Iaşi), *Ripianu Andrei*, *Săruleşteanu I. Emanoil* (lic. Vlaicu, Bucureşti), *Segal Joe* (Bucureşti), *Segal Zigu* (lic. Vaslui), *Slavov Iacob* (Bolgrad), *Solomon I. Isac* (lic. Internat, Iaşi), *Ştefănescn Marin* (Sub-Lt), *Stefănescu D. Nicolae* (lic. Milit., N Filipescu), *Stoenescu D. Mirel* (lic. Milit., N. Filipescu), *Tilică C. Ştefan* (lic T Severin) şi *Vijelie Gh. Eugen* (lic. Milit., N. Filipescu).

1619. — *Avem:*

$$41 + 80 + 320 = (-26) + 214 + 253 = 21^2$$

$$41 + 80 = 11^2$$

$$41 + 320 = 19^2$$

$$41^2 + 80^2 + 320^2 = (-26)^2 + 214^2 + 253^2.$$

Cum aflăm soluţia generală a sistemului,

$$a + b + c = x + y + z = t^2$$

$$a + b = u^2$$

$$a + c = v^2$$

$$b + c = w^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2?$$

A. MOESSNER

Soluţia autorului. Dacă punem,

$$c = 4q(q+r)(r^2 + s^2 - qr)$$

$$b = 4r(q+r)(q^2 + s^2 - qr)$$

$$a = (q^2 + r^2 + s^2)^2 - [2s(q+r)]^2,$$

p, q, r fiind întregi, observăm că:

$$a+b+c=(q^2+r^2+s^2)^2=t^2,$$
$$a+b=[(q^2+r^2+s^2)-2q(q+r)]^2=u^2,$$
$$a+c=[(q^2+r^2+s^2)-2r(q+r)]^2=v^2,$$
$$b+c=[2s(q+r)]^2=w^2.$$

Rămâne să aflăm soluţia generală a sistemului:

$$(1)\qquad \begin{cases} a+b+c=x+y+z \\ a^3+b^3+c^3=x^3+y^3+z^3. \end{cases}$$

Observăm mai general că relaţiile:

$$(2)\qquad \begin{cases} A_1+A_2+\cdots+A_k=(R-A_1)+(R-A_2)+\cdots+(R-A_k) \\ A_1^2+A_2^2+\cdots+A_2^2=(R-A_1)^2+(R-A_2)^2+\cdots+(R-A_k)^2, \end{cases}$$
$$(k=1,\ 2,\ldots n)$$

sunt satisfăcute simultan, pentru

$$R=\frac{2}{k}(A_1+A_2+\cdots+A_k).$$

Pentru $A_1=a$, $A_2=b$, $A_3=c$, $k=3$, sistemul (2) devine:

$$(3)\qquad \begin{cases} a+b+c=(R-a)+(R-b)+(R-c) \\ a^2+b^2+c^2=(R-a)^2+(R-b)^2+(R-c)^2, \end{cases}$$

care are loc pentru:

$$(4)\qquad R=\frac{2}{3}(a+b+c).$$

Prin urmare soluţia generală a sistemului (1) este:

$$(1')\qquad \begin{cases} x=R-a \\ y=R-b, \\ z=R-c \end{cases}$$

ceiace reiasă comparând (1) cu (3) şi unde R are valoarea din (4).

Observare. $q=1$, $r=4$, $s=2$, dă soluţia numerică din enunţul problemei.

S'a primit o soluţie dela d-l *Mahrenholz Jahannes* (Cottbus).

PROBLEME PROPUSE

1681. — Să se găsească un patrat perfect de forma $abcba$, unde cb este un patrat perfect, iar a prim.

ELENA D. PAPADOPOL

1682. — Să se arate că expresia:

$$E=4500.6^{6p+7}-150.4^{4p+6}+10.6^{2p+4}-8,$$

este divizibilă prin 343, p fiind întreg şi pozitiv.

IONEL I. STAMATE

1683. — Să se arate că:

$$\frac{x^2+y}{x^2-y}+\frac{y^2+x}{y^2-x}-\frac{xy-1}{xy+1}=\frac{(x^2+y)(y^2+x)(xy-1)}{(x^2-y)(y^2-x)(xy+1)}.$$

N. N. MIHAILEANU

1684. — Să se rezolve ecuaţia:

$$(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})\sqrt{x}=a$$

şi să se verifice soluţiile pentru $a=\pm 1$ şi $a=2$.

L-T. C. IONESCU-ŢIU

1685. — Să se rezolve în numere întregi ecuaţia:

$$x^4+y^2=5z^2.$$

A. GLODEN

1686. — Să se construiască un triunghiu cunoscând a şi diferenţele $b-h_a$, $c-h_a$ între fiecare din celelalte laturi şi înălţimea h_a.

G-L GH. BUICLIU

1687. — Se dă triunghiul dreptunghiu BAC în care AB = AC = 1.

Din A se duce o dreaptă oarecare care taie pe BC în D şi din D se duce perpendiculara DE pe AB.

Pe paralela dusă la AC prin B se ia BF = 2DE de partea în care se află DE. Din F se ia în spre B segmentul FG = 1.

Să se demonstreze că $\sphericalangle GAD=45^0$.

V. ALACI

1688. — Intr'un triunghiu există relaţia,

$$\frac{\cos B+\cos C}{\sin B+\sin C}=\frac{\sin C-\sin B}{\cos B-\cos C}=\frac{r_a}{p},$$

notaţiile fiind cele obicinuite.

S-LT MARIN F. STEFANESCU

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Areşteanu Hero (1658, 1661, 1663, 1664, 1673); *Dăscălescu Şt. Hristache* (1511, 1550, 1558, 1633, 1650, 1652); *Gligor N. Ioan* (1574, 1638); *Jipescu N. Vasile* (1664); *Lepolszky Carol* (1485, 1616, 1631, 1657, 1673, 1678); *Moldovan Cornel* (1562, 1570, 1602, 1674); *Popa D. Mircea* (1611, 1614, 1616, 1617, 1646, 1648, 1650, 1658, 1660, 1661, 1663, 1664, 1673. 1679); *Popescu Adrian* (P., 1633, 1664, 1659, 1669, 1673); *Segal Zigu* (1561, 1581, 1665, 1673); *Slavov Iacob* (1573, 1584, 1625, 1633, 1659); *Stoenescu D. Mirel* (1402, 1413, 1475, 1496, 1663, 1664, 1673); *Turcu R. Sandu* (1650, 1660, 1664); *Vasu Vasile* (P.).

INFORMAŢIUNI

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL XI-LEA

care a început în Martie 1938.

Costul *special* a unui abonament este de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Pentru anul al XI, care a început în Martie 1938, s'a primit până acum la Redacţia „R. M. T." următorul abonament:

1. *Prof. Sergescu P.*, Universitatea, Cluj.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecţia R. M. T., anul XV, în volum şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS:
1 an: Belgique, **30 fr.** France, **25 fr.**
Etranger, 7 **belgas**

Administration:
SPHINX, Bruxelles 173, Avenue Longchamp

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XVII, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

ANUL XVIII. 15 IULIE 1938 No. 5.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **EUGEN VISA:** O GENERALIZARE A COEFICIENTILOR BINOMIALI.
2. NOTE MATEMATICE: 7, 8.
3. SĂPTĂMÂNA MATEMATICĂ DELA CLUJ.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 1145, 1555, 1567, 1593 1608, 1616, 1623.
6. PROBLEME PROPUSE: 1689-1696.
7. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVIII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVIII inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XVIII — NO. 5 TIMISOARA, 15 IULIE 1938

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

O GENERALIZARE A COEFICIENȚILOR BINOMIALI

DE EUGEN VISA
PROFESOR, BLAJ.

Se cunoaște relația de recurență:

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1},$$

căreia îi satisfac coeficienții binomiali și care poate fi considerată drept relație de definiție a lor, dacă se are în vedere dublul șir de condițiuni inițiale:

$$C_0^n = 0 \qquad (n > 0)$$
$$C_m^0 = 1 \qquad (m \geqq 0).$$

In cele ce urmează îmi propun a studia în mod mai general cantitățile X_m^n definite prin relația de recurență:

$$\boxed{X_m^n = \alpha(m,n)\, X_{m-1}^n + \beta(m,n)\, X_{m-1}^{n-1}}, \tag{1}$$

în care cantitățile m și n sunt numere întregi pozitive, iar $\alpha(m,n)$ și $\beta(m,n)$ funcțiuni oarecari de aceste cantități, date.

Teorema I. *Cantitățile X_m^n definite prin relația de recurență* (1) *sunt perfect determinate, dacă se cunosc à priori cantitățile X_m^0 pentru toate valorile lui $m > 0$, precum și cantitățile X_0^n pentru toate valorile lui $n \geqq 0$.*

In adevăr, făcând în (1) succesiv $m = 1, 2, 3, \ldots, m$, avem:

$$\left\{\begin{aligned} X_1^n &= \alpha(1,n)\, X_0^n + \beta(1,n)\, X_0^{n-1} \\ X_2^n &= \alpha(2,n)\, X_1^n + \beta(2,n)\, X_1^{n-1} \\ X_3^n &= \alpha(3,n)\, X_2^n + \beta(3,n)\, X_2^{n-1} \\ &\vdots \\ X_m^n &= \alpha(m,n)\, X_{m-1}^n + \beta(m,n)\, X_{m-1}^{n-1}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Notând acuma:

$$\gamma(i,n) = \alpha(m,n).\alpha(m-1,n)\ldots\alpha(m-i+1,n), \tag{3}$$
$$(i \leqq m)$$

și convenind a lua:

$$\gamma(0,n) = 1, \tag{4}$$

prin eliminarea cantităților $X_1^n, X_2^n, X_3^n, \ldots, X_{m-1}^n$ între relațiile (2), obținem relația:

$$\boxed{X_m^n = \gamma(m,n)\, X_0^n + \sum_{i=1}^{m} \gamma(m-i,n).\beta(i,n)\, X_{i-1}^{n-1}}, \tag{5}$$

valabilă pentru toate valorile lui m și n, exceptând valorile *zero*, pentru cari nu are sens.

Această relație ne arată că X_m^n, depinde de X_0^n precum și de cantitățile X_m^{n-1} pentru toate valorile lui m cuprinse între 0 și $m-1$, inclusiv limitele acestui interval.

Cu alte cuvinte se poate spune că X_m^n este perfect determinat pentru toate valorile lui m mai mari decât *zero*, dacă se cunosc cantitățile X_0^n, X_0^{n-1} precum și cantitățile X_m^{n-1} pentru toate valorile lui m mai mari decât *zero*.

La rândul său urmează de aici că X_m^{n-1} este perfect determinat pentru toate valorile lui m mai mari decât zero, decă se cunosc cantitățile X_0^{n-1}, X_0^{n-2} precum și cantitățile X_m^{n-2} pentru toate valorile lui m mai mari decât zero.

Comparând acest rezultat cu precedentul, rezultă că X_m^n este perfect determinat pentru toate valorile lui m mai mari decât zero, dacă se cunosc cantitățile $X_0^n, X_0^{n-1}, X_0^{n-2}$ precum și cantitățile X_m^{n-2} pentru toate valorile lui m mai mari decât zero.

Continuând raționamentul, din aproape în aproape, se deduce că X_m^n este perfect determinat pentru

toate valorile lui m mai mari decât zero, dacă se cunosc cantităţile

$$X_0^n, X_0^{n-1}, \ldots, X_0^{n-k} \qquad (k \leq n),$$

precum şi cantităţile X_m^{n-k} pentru toate valorile lui m mai mari decât zero.

Dacă se consideră acum cazul limită $k = n$, rezultă în cele din urmă că X_m^n este perfect determinat pentru toate valorile lui m mai mari decât zero, dacă se cunosc cantităţile

$$X_0^n, X_0^{n-1}, X_0^{n-2}, \ldots, X_0^0,$$

precum şi cantităţile X_m^0 pentru toate valorile lui m mai mari decât zero.

Teorema este în felul acesta complet demonstrată.

Teorema II. *Dacă* X_0^n *este nul pentru toate valorile lui n mai mari decât zero, atunci* X_m^n *este nul pentru toate valorile lui n mai mari decât m.*

In adevăr, relaţia (1) ne dă în primul rând:

$$X_1^n = \alpha(1, n) X_0^n + \beta(1, n) X_0^{n-1}. \tag{6}$$

Să arătăm că $X_1^n = 0$ pentru $n > 1$.

Or, conform ipotezei că X_0^n este nul pentru $n > 0$, cu atât mai mult urmează că acesta este nul pentru $n > 1$.

Pe de altă parte, a spune că X_0^n este nul pentru $n > 0$, revine la a spune că X_0^{n-1} este nul pentru $n - 1 > 0$ sau, ceeace e totuna, că X_0^{n-1} este nul pentru $n > 1$.

In consecinţă dacă $n > 1$, atât X_0^n cât şi X_0^{n-1} sunt nuli, aşa încât după (6) rezultă în acest caz că şi X_1^n este nul.

Teorema noastră se verifică prin urmare pentru $m = 1$.

Presupunând acum că ea se verifică pentru m oarecare, să arătăm că se verifică şi pentru $m + 1$.

Pentru aceasta vom pleca tot dela relaţia de definiţie (1), care ne dă:

$$X_{m+1}^n = \alpha(m + 1, n) X_m^n + \beta(m + 1, n) X_m^{n-1}. \tag{7}$$

Presupunem prin urmare că X_m^n este nul pentru $n > m$. Urmează atunci cu atât mai mult că acesta este nul pentru $n > m + 1$.

In acelaş timp mai urmează pe de altă parte că X_m^{n-1} va fi şi el nul pentru $n - 1 > m$, adică pentru $n > m + 1$.

Ţinând seamă de aceste două rezultate din urmă, relaţia (7) ne spune numai decât că, în ipoteza dată, X_{m+1}^n este deasemenea nul pentru $n > m + 1$.

Prin urmare, dacă teorema noastră este adevărată pentru m, ea subsistă şi pentru $m + 1$ şi, întrucât am văzut că se verifică pentru $m = 1$, rezultă că este adevărată pentru toate valorile lui $m > 0$.

Observaţiuni. Să presupunem că $X_0^n = 0$ pentru $n > 0$.

Conform teoremei II urmează atunci că $X_m^n = 0$ pentru $n > m$.

In acest caz, evident că X_m^n va mai depinde numai de valorile pe cari le ia X_m^0 pentru $m \geq 0$.

Or, vom putea defini pe X_m^0 printr'o relaţie de forma:

$$X_m^0 = \psi(m) \qquad (m \geq 0), \tag{8}$$

aşa încât în felul acesta cantităţile X_m^n vor fi perfect determinate pentru toate valorile întregi-pozitive ale lui m şi n.

Presupunând o astfel de relaţie dată, să formăm apoi un tablou de toate valorile numerice ale cantităţilor X_m^n, exceptând acelea pentru cari $n > m$, adică valorile nule. După cum este uşor de constatat, vom avea de a face cu un tablou triunghiular analog tabloului clasic al lui *Pascal* din cazul coeficienţilor binomiali şi care-l generalizează pe acesta din urmă:

$$\begin{array}{cccccc} X_0^0 & & & & & \\ X_1^0 & X_1^1 & & & & \\ X_2^0 & X_2^1 & X_2^2 & & & \\ X_3^0 & X_3^1 & X_3^2 & X_3^3 & & \\ \vdots & & & & & \\ X_m^0 & X_m^1 & X_m^2 & X_m^3 & \ldots & X_m^m \end{array} \tag{9}$$

Legea de formare a termenilor din acest tablou este evident cea dată de relaţia (1), care nu este influenţată întru nimic de condiţiunile iniţiale date.

O problemă interesantă, care se pune relativ la acest tablou, este aceea de a vedea ce devine relaţia (5) pentru cazul particular al termenilor lui.

Or, se observă în primul rând că, termenul în X_0^n din membrul doi al ei va dispare, întrucât X_0^n

este nul pentru $n > 0$, ceeace este tocmai cazul nostru, deoarece această relaţie ne dă pe X_m^n numai pentru $n > 0$, X_m^0 fiind dat à priori de relaţia (8).

In al doilea rând, întrucât X_{i-1}^{n-1} este nul pentru $n-1 > i-1$, adică pentru $i < n$, urmează că vom putea considera în suma din membrul doi pe i ca variind numai dela n începând, iar nu dela 1.

In consecinţă, dacă ţinem seama de aceste două observaţii, relaţia (5) se va putea scrie:

$$(10) \qquad X_m^n = \sum_{i=n}^{m} \gamma(m-i, n) \cdot \beta(i, n) X_{i-1}^{n-1}$$

şi făcând schimbarea:

$$(11) \qquad i = n + k,$$

avem:

$$X_m^n = \sum_{k=0}^{m-n} \gamma(m-n-k, n) \cdot \beta(n+k, n) X_{n+k-1}^{n-1},$$

în care înlocuind noua variabilă de însumare k, prin i, se mai poate scrie şi sub forma:

$$(12) \qquad \boxed{X_m^n = \sum_{i=0}^{m-n} \gamma(m-n-i, n) \cdot \beta(n+i, n) X_{n+i-1}^{n-1}}.$$

Avem astfel în (12) o relaţie care generalizează relaţia cunoscută

$$C_m^n = \sum_{i=0}^{m-n} C_{n+i-1}^{n-1},$$

din cazul coeficienţilor binomiali.

Evident apoi că şi alte relaţii din cazul acestor coeficienţi îşi au corespondentele lor generale pentru cazul cantităţilor X_m^n definite prin relaţia de recurenţă (1).

Analogia va fi mai manifestă în particular dacă se dă $X_0^n = 0$ pentru $n > 0$, aşa cum a fost cazul care ne-a condus la relaţia (12) şi cu atât mai mult încă dacă în plus, relaţia (8) se reduce la:

$$X_m^0 = 1 \qquad (m \geqq 0)$$

de oarece în cazul coeficienţilor binomiali avem deasemenea:

$$C_m^0 = 1 \qquad (m \geqq 0).$$

Cred însă că alte relaţiuni cărora să le satisfacă cantităţile X_m^n definite prin relaţia (1) vor fi ceva mai greu de stabilit, cel puţin atâta timp cât nu se va putea deduce din (1) o formulă directă care să ne dea expresia generală a lor în funcţie de m şi n.

In această ordine de idei, o problemă interesantă este şi numai faptul dacă o astfel de formulă s'ar putea deduce de-a dreptul din relaţia (1).

In partea a doua a cererii *No. 259*, publicată în *„G. M.“, Vol. XLI, pag. 629*, am pus această problemă pentru cazul particular al coeficienţilor binomiali.

Cât priveşte răspunsul la prima parte a acestei cereri, după expunerea făcută în cele ce preced, acesta este uşor de dat, deoarece el rezidă în teorema I a prezentului articol.

Mai rămâne atunci ca problemă deschisă din această cerere partea a doua a ei, care după cum am văzut, constitue, la rândul său, un caz particular al problemei menţionate mai sus, problemă ce rămâne deasemenea deschisă.

NOTE MATEMATICE

7. — *Numere interesante cu 10 cifre diferite.* In notele cu acest titlu publicate la pag. 80, 92, 117, 129, 140, Vol. XVI al acestei reviste, am dat soluţiile problemei 2875, propusă de d-l *V. Thébault* în *„Mathesis“*, Vol. LVIII cu următorul enunţ:

Cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 luate câte o singură dată să se formeze un număr, care divizat prin 3, 6, 9 să dea un cât format din cele 8 cifre diferite de 3, 6 sau 9.

Exemple de soluţii

$$138527946 = 3 \times 46175982$$

$$259631748 = 6 \times 43271958$$

$$785926314 = 9 \times 87325142.$$

Cu începere de la pag. 247, Vol. XLII dau în *„Gazeta Matematică“*, în diferite note, soluţiile aceleiaşi probleme pentru cazul când se întrebuinţează toate cele 10 cifre ale sistemului zecimal.

Exemple de soluţii

$$3 \times 528764901 = 1586294703$$

$$6 \times 182790543 = 1096743258$$

$$9 \times 640215378 = 5761938402.$$

In nota de faţă voi da soluţiile problemei 3033 propusă tot de d-l *V. Thébault* în *„Mathesis“*, Vol. LI, pag. 350 şi ne rezolvată încă. Enunţul problemei cere ca, *cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 să se formeze 4 numere astfel ca produsul a 2 din ele să fie egal cu produsul celorlalte două.*

Avem următoarele posibilităţi

$$a \times b\,c\,d\,e = \alpha \times \beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon; \quad a \times b\,c\,d\,e = \alpha\,\beta \times \gamma\,\delta\,\varepsilon;$$

$$a\,b \times c\,d\,e = \alpha\,\beta \times \gamma\,\delta\,\varepsilon.$$

Dau lui a şi $a\,b$ toate valorile posibile dela 1 la 98.

De exemplu $a\,b = 37$ şi am

$$(1) \qquad 37 \times c\,d\,e = \alpha\,\beta \times \gamma\,\delta\,\varepsilon.$$

Numărul 37 fiind prim, cel puţin unul din factorii membrului II se divide prin 37. Multiplii lui 37, care nu conţin nici una din cifrele 3, 7 sau cifre identice sunt:

148, 185, 296, 481, 518, 592, 629, 740, 814, 851, 962.

Se introduce în (1) în locul lui $\gamma\,\delta\,\varepsilon$ fie-care din aceste numere, de exemplu 296. Atunci (1) devine

$$37 \times c\,d\,e = 296 \times \alpha\,\beta,$$

$$(2) \qquad c\,d\,e = 8 \times \alpha\,\beta,$$

unde c, d, e, α, β sunt cifrele 0, 1, 4, 5, 8.

Se vede că e trebuie să fie pereche de exemplu 8, ceia ce înseamnă $\alpha = 1$, etc.

Pe această cale, simplificând numărul încercărilor după cazuri, am găsit următoarele două grupe de soluţiuni.

Grupa I. Unul din cele 4 numere începe cu 0, exemplu

$$01 \times 3752 = 8 \times 469.$$

O ast-fel de soluţiune dă loc la alte 3 soluţiuni, căci 0 se poate pune tot aşa de bine înaintea lui 3752, a lui 8 ca şi a lui 469.

$1 \times 3752 = 8 \times 469$
$1 \times 4263 = 49 \times 87$
$1 \times 4296 = 8 \times 537$
$1 \times 4736 = 8 \times 592$
$1 \times 4876 = 53 \times 92$
$1 \times 5392 = 8 \times 674$
$1 \times 5394 = 62 \times 87$
$1 \times 5432 = 8 \times 679$
$1 \times 5742 = 9 \times 638$
$1 \times 5936 = 8 \times 742$
$1 \times 6352 = 8 \times 794$
$1 \times 7456 = 8 \times 932$
$1 \times 7524 = 9 \times 836$
$1 \times 7536 = 8 \times 942$
$1 \times 7624 = 8 \times 953$
$1 \times 7632 = 8 \times 954$
$2 \times 1358 = 4 \times 679$
$2 \times 1538 = 4 \times 769$
$2 \times 1576 = 8 \times 394$
$2 \times 1586 = 4 \times 793$
$2 \times 1749 = 6 \times 583$
$2 \times 1756 = 8 \times 439$
$2 \times 1869 = 7 \times 534$
$2 \times 1943 = 58 \times 67$
$2 \times 3451 = 7 \times 986$
$2 \times 3458 = 76 \times 91$
$3 \times 1458 = 6 \times 729$
$3 \times 1584 = 6 \times 792$
$3 \times 1728 = 54 \times 96$
$3 \times 1746 = 9 \times 582$
$3 \times 1824 = 57 \times 96$
$3 \times 1854 = 6 \times 927$
$4 \times 1372 = 56 \times 98$
$4 \times 1638 = 72 \times 91$
$7 \times 538 = 14 \times 269$
$7 \times 638 = 29 \times 154$
$7 \times 658 = 14 \times 329$
$9 \times 476 = 28 \times 153$
$9 \times 534 = 18 \times 267$
$9 \times 546 = 18 \times 273$
$9 \times 654 = 18 \times 327$
$9 \times 782 = 46 \times 153$
$12 \times 584 = 73 \times 96$
$14 \times 532 = 76 \times 98$
$18 \times 236 = 59 \times 72$
$18 \times 259 = 63 \times 74$
$23 \times 158 = 46 \times 79$
$23 \times 174 = 58 \times 69$
$27 \times 138 = 54 \times 69$
$27 \times 186 = 54 \times 93$
$29 \times 134 = 58 \times 67$
$32 \times 174 = 58 \times 96$

Aceste soluţiuni corespund aceleiaşi probleme pentru cazul întrebuinţărei numai a cifrelor semnificative.

Grupa II. Toate cele 4 numere încep cu cifre semnificative.

$1 \times 6970 = 2 \times 3485$
$1 \times 7096 = 2 \times 3548$
$1 \times 7690 = 2 \times 3845$
$1 \times 9076 = 2 \times 4538$
$1 \times 9370 = 2 \times 4685$
$1 \times 9670 = 2 \times 4835$
$1 \times 9706 = 2 \times 4853$
$1 \times 9730 = 2 \times 4865$
$2 \times 3485 = 10 \times 697$
$2 \times 3845 = 10 \times 769$
$2 \times 4589 = 13 \times 706$
$2 \times 4685 = 10 \times 937$
$2 \times 4835 = 10 \times 967$
$2 \times 4865 = 7 \times 1390$
$2 \times 4865 = 10 \times 973$
$2 \times 4865 = 70 \times 139$
$2 \times 5096 = 13 \times 784$
$2 \times 5876 = 13 \times 904$
$2 \times 6083 = 79 \times 154$
$2 \times 6940 = 8 \times 1735$
$2 \times 7480 = 16 \times 935$
$2 \times 7960 = 5 \times 3184$
$2 \times 8619 = 34 \times 507$
$3 \times 2790 = 18 \times 465$
$3 \times 2970 = 6 \times 1485$
$3 \times 4158 = 6 \times 2079$
$3 \times 4290 = 78 \times 165$
$3 \times 4860 = 15 \times 972$
$3 \times 4956 = 21 \times 708$
$3 \times 5096 = 7 \times 2184$
$3 \times 5418 = 6 \times 2709$
$3 \times 5704 = 92 \times 186$
$3 \times 5916 = 87 \times 204$
$3 \times 6041 = 7 \times 2589$
$3 \times 6174 = 9 \times 2058$
$3 \times 6970 = 5 \times 4182$
$3 \times 7608 = 24 \times 951$
$3 \times 7612 = 4 \times 5709$
$3 \times 8092 = 51 \times 476$
$3 \times 8106 = 42 \times 579$
$3 \times 8154 = 27 \times 906$
$3 \times 9270 = 45 \times 618$
$3 \times 9702 = 6 \times 4851$
$4 \times 1957 = 38 \times 206$

$4 \times 2639 = 7 \times 1508$
$4 \times 2703 = 68 \times 159$
$4 \times 2795 = 13 \times 860$
$4 \times 2795 = 86 \times 130$
$4 \times 3519 = 68 \times 207$
$4 \times 3710 = 5 \times 2968$
$4 \times 5719 = 38 \times 602$
$4 \times 7160 = 32 \times 895$
$4 \times 7209 = 81 \times 356$
$4 \times 7502 = 31 \times 968$
$4 \times 7608 = 32 \times 951$
$4 \times 7910 = 5 \times 6328$
$4 \times 8390 = 5 \times 6712$
$4 \times 8920 = 5 \times 7136$
$4 \times 9160 = 5 \times 7328$
$4 \times 9210 = 5 \times 7368$
$4 \times 9308 = 52 \times 716$
$5 \times 2968 = 40 \times 371$
$5 \times 2976 = 31 \times 480$
$5 \times 2976 = 48 \times 310$
$5 \times 3184 = 20 \times 796$
$5 \times 4182 = 30 \times 697$
$5 \times 4278 = 31 \times 690$
$5 \times 4278 = 69 \times 310$
$5 \times 6328 = 40 \times 791$
$5 \times 6712 = 40 \times 839$
$5 \times 7136 = 40 \times 892$
$5 \times 7328 = 40 \times 916$
$5 \times 7368 = 40 \times 921$
$5 \times 7826 = 43 \times 910$
$5 \times 7826 = 91 \times 430$
$5 \times 8372 = 46 \times 910$
$5 \times 8372 = 91 \times 460$
$6 \times 1485 = 30 \times 297$
$6 \times 1938 = 57 \times 204$
$6 \times 2781 = 54 \times 309$
$6 \times 3059 = 21 \times 874$
$6 \times 3180 = 24 \times 795$
$6 \times 3819 = 57 \times 402$
$6 \times 4185 = 27 \times 930$
$6 \times 4185 = 93 \times 270$
$6 \times 4527 = 9 \times 3018$
$6 \times 7320 = 48 \times 915$
$6 \times 7812 = 93 \times 504$
$6 \times 8127 = 54 \times 903$
$7 \times 1406 = 38 \times 259$
$7 \times 1480 = 35 \times 296$
$7 \times 1508 = 29 \times 364$
$7 \times 2156 = 49 \times 308$
$7 \times 4160 = 35 \times 892$
$7 \times 4810 = 35 \times 962$
$7 \times 5016 = 38 \times 924$
$8 \times 1735 = 20 \times 694$
$8 \times 2170 = 35 \times 496$
$8 \times 7320 = 64 \times 915$
$9 \times 1380 = 45 \times 276$
$9 \times 2754 = 81 \times 306$
$9 \times 3608 = 72 \times 451$
$9 \times 3810 = 45 \times 762$
$9 \times 4602 = 78 \times 531$
$9 \times 5048 = 72 \times 631$
$9 \times 5104 = 72 \times 638$
$9 \times 5427 = 81 \times 603$
$9 \times 6504 = 72 \times 813$
$13 \times 970 = 26 \times 485$
$15 \times 972 = 30 \times 486$
$16 \times 935 = 20 \times 748$
$16 \times 970 = 32 \times 485$
$18 \times 459 = 27 \times 306$
$18 \times 465 = 30 \times 279$
$24 \times 795 = 60 \times 318$
$26 \times 485 = 97 \times 130$
$27 \times 480 = 96 \times 135$
$27 \times 618 = 54 \times 309$
$29 \times 380 = 76 \times 145$
$29 \times 518 = 37 \times 406$
$29 \times 614 = 58 \times 307$
$30 \times 429 = 78 \times 165$
$30 \times 927 = 45 \times 618$
$31 \times 760 = 95 \times 248$
$31 \times 970 = 62 \times 485$
$32 \times 485 = 97 \times 160$
$32 \times 895 = 40 \times 716$
$35 \times 296 = 70 \times 148$
$35 \times 496 = 80 \times 217$
$35 \times 892 = 70 \times 416$
$35 \times 962 = 70 \times 481$
$36 \times 890 = 45 \times 712$
$36 \times 910 = 45 \times 728$
$37 \times 408 = 51 \times 296$
$37 \times 460 = 92 \times 185$
$38 \times 290 = 76 \times 145$
$38 \times 902 = 76 \times 451$
$41 \times 760 = 95 \times 328$
$45 \times 276 = 90 \times 138$
$45 \times 712 = 89 \times 360$
$45 \times 728 = 91 \times 360$
$46 \times 370 = 92 \times 185$
$46 \times 901 = 53 \times 782$
$48 \times 270 = 96 \times 135$
$48 \times 702 = 96 \times 351$
$48 \times 915 = 60 \times 732$
$51 \times 632 = 79 \times 408$
$62 \times 485 = 97 \times 310$
$63 \times 712 = 89 \times 504$
$63 \times 728 = 91 \times 504$
$64 \times 915 = 80 \times 732$
$74 \times 301 = 86 \times 259$
$76 \times 310 = 95 \times 248$
$76 \times 410 = 95 \times 328$

Grupa întâi dă 4×52 soluţiuni care impreună cu cele 154 ale grupei II fac un total de 362 soluţiuni.

G L Gh. Buicliu

---

8. — *Sur la représentation de certains carrés par des demi-sommes de 3 bicarrés et des sommes de 3 carrés.*

A. Moessner a montré (cf. *A. Moessner*, Tôhoku Math. Journal, Vol. 44, Part. 2, pp. 401—405, March 1938), que, pour les nombres

$$2X = m^2 + n^2 + (m+n)^2,$$

ou, ce qui revient au même,

$$X = m^2 + mn + n^2,$$

on a

$$X^2 = \frac{m^4 + n^4 + (m+n)^4}{2} =$$

$$[m(m+n)]^2 + [n(m+n)]^2 + (mn)^2.$$

On obtient donc autant de représentations de la forme

$$\frac{Y^4 + Z^4 + (Y+Z)^4}{2} \quad \text{et} \quad T^2 + U^2 + V^2,$$

pour X^2 que le nombre X admet de représentations de la forme $m^2 + mn + n^2$.

M. Moessner donne (loc. cit., page 403) comme exemple 91^2 qui admet d'après un théorème que nous avons donné (Rev. Mat. Timişoara, 1938, page 122)

$$\frac{(2+1)(2+1)}{2} - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

représentations distinctes de la forme

$$m^2 + mn + m^2.$$

Nous donnerons ici un exemple numérique d'un carré qui admet 12 représentations de la forme

$$\frac{Y^4 + Z^4 + (Y+Z)^4}{2},$$

et autant de la forme $T^2 + U^2 + V^2$.

Le nombre $1.101.373 = 7^3 . 13^2 . 19$ admet en effet,

$$\frac{(3+1)(2+1)(1+1)}{2} = 12$$

représentations $m^2 + mn + n^2$. On aura

$$1.101.373 = 483^2 + 721^2 + 483.721$$
$$= 217^2 + 924^2 + 217.924$$
$$= 364^2 + 819^2 + 364.819$$
$$= 91^2 + 1001^2 + 91.1001$$
$$= 533^2 + 676^2 + 533.676$$
$$= 429^2 + 767^2 + 429.767$$
$$= 241^2 + 908^2 + 241.908$$
$$= 36^2 + 1031^2 + 36.1031$$
$$= 149^2 + 967^2 + 149.967$$
$$= 129^2 + 979^2 + 129.979$$
$$= 567^2 + 644^2 + 567.644$$
$$= 308^2 + 861^2 + 308.861.$$

$$(1.101.373)^2 = 1.213.022.485.129$$

$$= \frac{483^4 + 721^4 + 1204^4}{2} = \frac{217^4 + 924^4 + 1141^4}{2}$$

$$= \frac{364^4 + 819^4 + 1183^4}{2} = \frac{91^4 + 1001^4 + 1092^4}{2}$$

$$= \frac{533^4 + 676^4 + 1209^4}{2} = \frac{429^4 + 767^4 + 1196^4}{2}$$

$$= \frac{241^4 + 908^4 + 1149^4}{2} = \frac{36^4 + 1031^4 + 1067^4}{2}$$

$$= \frac{149^4 + 967^4 + 1116^4}{2} = \frac{129^4 + 979^4 + 1108^4}{2}$$

$$= \frac{567^4 + 644^4 + 1211^4}{2} = \frac{308^4 + 861^4 + 1169^4}{2}$$

$$= (483.1204)^2 + (721.1204)^2 + (483.721)^2$$
$$= (217.1141)^2 + (924.1141)^2 + (217.924)^2$$
$$= (364.1183)^2 + (819.1183)^2 + (364.819)^2$$
$$= (91.1092)^2 + (1001.1092)^2 + (91.1001)^2$$
$$= (533.1209)^2 + (676.1209)^2 + (533.676)^2$$
$$= (429.1196)^2 + (767.1196)^2 + (429.767)^2$$
$$= (241.1149)^2 + (908.1149)^2 + (241.908)^2$$
$$= (36.1067)^2 + (1031.1067)^2 + (36.1031)^2$$
$$= (149.1116)^2 + (967.1116)^2 + (149.967)^2$$
$$= (129.1108)^2 + (979.1108)^2 + (129.979)^2$$
$$= (567.1211)^2 + (644.1211)^2 + (567.644)^2$$
$$= (308.1169)^2 + (86 .1169)^2 + (308.861)^2.$$

Ajoutons qu'on a aussi

$$X^2 = \frac{(m^2 - n^2)^2 + (2mn + n^2)^2 + (2mn + m^2)^2}{2}.$$

A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

INFORMAȚII

Săptămâna matematică dela Cluj.

Ceremonia mișcătoare a înmânării săbiei de academician matematicianului parizian *Paul Montel* a prilejuit sosirea în țară a mai multor alți matematicieni streini, foști elevi ai săi. Ziarele au reprodus la timp desfășurarea, la București, a acestei ceremonii, a cărei inițiativă a pornit dela profesorul *P. Sergescu,* susținut de un comitet format din profesorii secției matematice ai Universității clujene. Acest frumos gest continuă o tradiție care cere ca sabia de academician, făcând parte din ținuta de ceremonie a fiecărui membru al Academiei pariziene, să fie oferită fiecărui nou ales sub celebra cupolă de către foștii săi elevi. Sosirea la Cluj a unei părți din matematicienii streini, cu o săptămână înnaintea ceremoniei, a mai prilejuit însă o amplificare a „săptămânii matematice" care se ține în în fiecare an la Cluj, atunci când sosesc oaspeți streini. De data aceasta reuniunea a luat aspectul unui mic congres în care s'au făcut comunicări din mai toate ramurile Matematicei și chiar din unele aplicații ale ei. După luminoasele lecțiuni ale D-lui *P. Montel* asupra teoriei interpolației, și acele ale D-lui *M. Biernacki* asupra unor interesante proprietăți ale reprezentării conforme, avem de menționat conferințele D-rei *L. Charpentier* asupra punctelor lui *Peano* relative la ecuațiile diferențiale de ordinul întâi, și acele ale D-lor prof. *D. Pompeiu* asupra unor importante chestiuni de teoria funcțiilor analitice, *S. Stoilov asupra* transformărilor interioare, *O. Onicescu* asupra lucrărilor lui *Leray* și *Schauder* din teoria ecuațiilor funcționale, *J. L. Destouches* asupra teoriilor fizicei moderne, *P. Gillis* asupra metodelor moderne din calculul variațiilor, *A. Pantazi* asupra metodei reperului mobil în Geometria spațiului proiectiv, *M. Ghermă-*

nescu asupra combinaţiilor excepţionale de funcţii întregi, *N. Theodorescu* asupra Geometriei ecuaţiilor cu derivate parţiale. Apoi comunicările la Cercul matematic al Soc. de Ştiinţe Cluj: prof. *Th. Angheluţă* asupra limitării modulelor zerurilor la ecuaţiile algebrice, *N. Abramescu* asupra normalei unghiulare la o curbă plană, *G. Bratu* asupra unei teoreme a D-lui *Pompeiu*, *P. Sergescu* asupra începuturilor calculului infinitezimal. *D. V. Ionescu* asupra unor ecuaţii funcţionale, *N. Ciorănescu* asupra unor desvoltări ale funcţiilor analitice de două variabile reale şi asupra unei generalizări a formulei mediei, *G. Călugăreanu* asupra invarianţilor de prelungire ai funcţiilor întregi, *R. Bădescu* asupra randamentului instalaţiilor de cianurare a minereului de aur, *C. Iacob* asupra problemei lui *Dirichlet*. Bogăţia programului nu a împiedicat pe oaspeţii Clujului să facă şi o frumoasă excursie în regiunea auriferă a munţilor Apuseni, la Abrud, Brad, apoi Deva şi Alba-Iulia. A urmat ceremonia dela Bucureşti, la care numărul oaspeţilor streini a fost important, iar primirea D-lui *Montel* deosebit de călduroasă. Să ne bucurăm de succesul ambelor manifestări, care confirmă o continuă ascensiune a nivelului cultural dela noi.

G. C.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLIII, No. 10, Iunie 1938. Rezultatul Concursului „*Gazetei Matematice*“, de *G. Ţiţeica*. Architecturae militaris tyrocinium a lui *E. Vols* (urmare şi sfârşit), de *Victor Marian*. Aritmetica lui *Gheorghe Asachi* (urmare), de *P. V. Cazanacli*. Discuţia realităţii rădăcinelor ecuaţiilor de gradul 3 şi 4, cu coeficienţi reali, de *Th. Angheluţă*. Propoziţii de geometria triunghiului, de *N. N. Mihăileanu*. O problemă asupra conicelor, de *Gh. D. Simionescu*. Note, probleme rezolvate şi propuse.

2. *Bulletin Scientifique de L'École Polytechnique de Timişoara*, Tome 8, Fasc. 1—2, 1938. Solution analytique du problème des oscilations amortisées, par *V. Alaci*. Sur le théorème de *Feuerbach*, par *V. Thébault*. Sur des fonctions hypergeométriques confluents, par *Gh. Th. Gheorghiu*. Sur un problème de Mécanique, par *Michel Ghermanescu*. The cosmogonical problem of the annihilation of thu sun's mass, and the evolution of the planetary orbits, by Prof. *Teofil T. Vescan*. Sur l'unité de la Physique théorique, par *Jean-Louis Destouches*. Destruktive Hydrierung eines Rumänischen Handelspetroleums, von Prof. Dr. Ing. *C. Cândea* und *J. Kühn*. Die Oxydation von Mineralschmierölen, von Prof. Dr. Ing. *C. Cândea* und *N. Cristodulo*. Determinarea pierderilor de sarcină în conducte circulare drepte de diametru 250 mm şi 125 mm, de Prof. Ing. *Pompiliu Nicolau* şi Asist. Ing *Victor Gheorghiu*.

3. *Stiinţă şi Progres*, Revista Stiinţifică a liceelor militare, anul IV, No. 12, Iunie 1938. Săptămâna matematica dela Cluj. Asupra teoremei *Ptolomeu*, de *N. N. Mihăileanu*. Câteva teoreme în legătură cu poligoanele regulate, de *I. V. Mătieş*. Note de excursie, de Căpit. *Al. Ionescu-Pelican*. Probleme rezolvate şi propuse.

4. *Buletinul muzeului regional al Basarabiei din Chişinău*, No 8, 1937. Conţine articole de specialitate.

5. *A. Moessner*. Zahlentheoretische Untersuchungen und Rezultate. (Extracted from The Tôhoku Mathematical Journal, vol. 44, 1938).

6. *Gh. Th. Gheorghiu*. Sur des fonctions hypergeométriques confluentes. (Extrait du „Bulletin Scientifique de L'École Polytechnique de Timişoara, Tome 8, Fasc. 1 - 2, 1938).

7. Prof. *Ioan Curea*. Determinarea polului ceresc pe cale astrografică. (Lucrare de doctorat.)

8. Prof. *Ioan Curea*. Astrographische Bestimmung der Lage des Himmelspoles. (Abdruck aus den Astr. Nachr., 1938.)

PROBLEME REZOLVATE

1145. — *Să se gasiască un patrat perfect de opt cifre ştiind că suma celor două numere de câte patru cifre de la dreapta şi de la stânga este un număr format din cifre egale.*

V THÉBAULT

Soluţie. Fie

$$N^2 = 10^4 A + B \tag{1}$$

patratul căutat, iar A şi B numerele de câte 4 cifre de la dreapta şi de la stânga lui N^2. După enunţ numerele A şi B sunt legate între ele prin relaţiunea

$$A + B = a \times 1111 = a \times 11 \times 101 \tag{2}$$

a fiind un număr de o cifră. Eliminând pe B între (1) şi (2), obţinem

$$N^2 = 9999\,A + 1111\,a = (9A + a) \times 11 \times 101$$

ceia ce arată că N este un multiplu de

$$11 \times 101 = 1111.$$

Cum $N^2 < 99999999$, rezultă $N \leq 9999$. Ridicând la patrat pe cele 9 numere de 4 cifre, de forma $aaaa$ se găseşte că problema are următoarele 6 soluţiuni:

$1111^2 = 0123.4321$ cu $0123 + 4321 = 4444$

$2222^2 = 0493.7284$ „ $0493 + 7284 = 7777$

$3333^2 = 1110.8889$ „ $1110 + 8889 = 9999$

$6666^2 = 4443.5556$ „ $4433 + 5556 = 9999$

$7777^2 = 6048.1729$ „ $6048 + 1729 = 7777$

$9999^2 = 9998.0001$ „ $9998 + 0001 = 9999.$

Notă. 1°. Urmând o cale analoagă, d-l *Mazilu C. P.* (Şc. Politechnică, Bucureşti) a găsit ultimele 4 soluţiuni

Este drept, că primele două soluţiuni sunt numai formal numere de câte 8 cifre.

2°. D-l *Dobos E.* (Cluj) a dat de asemeni ultimele 4 soluţiuni, însă fără raţionament riguros.

3°. D-nii *Amărăşteanu F. M.*, *Godeanu I. V*, *Ionescu Emil* şi *Predoiescu I. M.* au găsit numai câte una din ultimele 4 soluţiuni.

4°. D l *Ionescu Emil* (Bacalaureat, Craiova), care a găsit numai soluţia 3333^2, observă încă următoarea curiozitate a acestui patrat. Rădăcina lui şi sumele cifrelor celor două numere de câte 4 cifre din dreapta şi stânga se scriu cu aceiaşi cifră, în adevăr

$$3333^2 = 1110.8889,$$
$$1 + 1 + 1 + 0 = 3,$$
$$8 + 8 + 8 + 9 = 33.$$

5°. Se observă că

$$4444^2 = 1974.9136, \qquad 5555^2 = 3085.8025$$

şi că

$$1974 + 9136 = 3085 + 8025 = 11110.$$

Patratele acestea răspund următoarei probleme: *Se cer patratele de 8 cifre ştiind că suma numerelor de câte 4 cifre de la dreapta şi de la stânga este multiplu unui număr de patru cifre egale.*

6°. In fine

$$8888^2 = 7899.6544,$$
$$78.9 + 6544 = 14443,$$

căruia dacă i se adună 1 se obţine un număr de 5 cifre dintre care ultimele 4 identice.

G-l Gh B.

1555. — *Să se găsească un bipatrat de patru sau cinci cifre, a cărui rădăcină să fie egală cu suma cifrelor acelui bipatrat.*

M GHERMANESCU

Fie N rădăcina bipatratului cerut.

1°. Dacă N^4 este de patru cifre, atunci

$$36^2 \leq N^2 \leq 81,$$

deci:

$$6 \leq N \leq 9.$$

Bipatratul N^4 ar putea fi astfel:

$6^4 = 1296$ $\quad$ $8^4 = 4096$

$7^4 = 2401$ $\quad$ $9^4 = 6541.$

Dintre aceste bipatrate, numai 2401 are suma cifrelor egală cu rădăcina sa patrată, *deci 2401 este o soluţie a problemei.*

2°. Dacă N^4 este de cinci cifre, atunci,

$$100 \leq N^2 \leq 316,$$

urmează că:

$$10 \leq N < 18.$$

Bipatratul N^4 ar putea fi în acest caz:

$10^4 = 10000$ $\quad$ $14^4 = 38416$

$11^4 = 14641$ $\quad$ $15^4 = 50625$

$12^4 = 20736$ $\quad$ $16^4 = 65536$

$13^4 = 28651$ $\quad$ $17^4 = 83521.$

Dintre aceste bipatrate de cinci cifre, nici unul nu satisface condiţia ca suma cifrelor să fie egală cu rădăcina lor.

Soluţii date de d-nii: *Anton G. George* (lic. Bistriţa), *Berinde L. Titus* (Şc. Polit., Timişoara), *Dăscălescu Şt. Hristache* (Focşani), *Jidanu C-tin* (lic. Beiuş), *Lepolszky Carol* (bacalaureat), *Lupescu Corneliu* (Sub-Lt), *Milu I. Nicolae* (Şc. Pregătitoare de Ofiţeri), *Rădulescu Gh. Octavian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Ripianu Andrei*, *Tilică C. Ştefan* (lic. T-Severin) şi *Turcu Sandu* (lic Milit., Iaşi).

1567. — *Fie* A B C D *un trapez isoscel*, E şi F *mijloacele laturelor paralele* A B *şi* C D, I *intersecţia diagonalelor* A C şi B D.

Paralela la A B *dusă prin* I *taie pe* A D şi B C *in* G *şi* H, *iar paralelele duse prin* G *la* A C *şi* B D *taie pe* E F *respectiv în* L *şi* M.

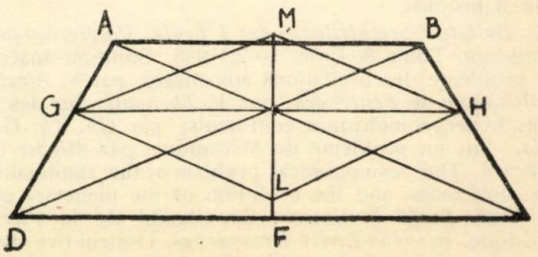
1°. *Să se arate că* I G *este bisectoarea unghiului* A I D.

2°. *Dreapta* A C *împarte segmentul* G M *în părţi egale.*

3°. *Figura* G M H L *este un romb.*

LT. C. D. IONESCU-ŢIU

Soluţie 1°. Trapezul fiind isoscel, e isoscel şi triunghiul A I B; se observă atunci pe figură, ega-



lităţile de unghiuri corespondente

$\sphericalangle GIA = \sphericalangle IAB = \sphericalangle ABI = \sphericalangle GID$,

deci GI *este bisectoarea unghiului* AID.

2°. In paralelogramul GMHL, paralelele din centrul I la latura, trec prin mijloacele acestora, deci AIC *trece prin mijlocul laturei* GM.

3°. EF e perpendiculară pe laturele paralele, deci pe GH şi paralelogramul GMHL având diagonalele perpendiculare, *este un romb.*

Observaţii. 1. Demonstraţia autorului pentru primele două puncte: notând O intersecţia (AD, BC), fascicolul I (OAGD) tăiat de secanta AB paralelă cu GH are ca valoare AE:EB = 1, deci *este armonic*; tăiat de secanta GM, paralelă cu raza DB, va da din non GN = NM după o propoziţie de definiţie; apoi IE este bisectoarea unghiului AIB; conjugata ei va fi a doua bisectoare, deci bisectoarea unghiului AID.

2. Variante ale demonstraţiei punctului 1°. a. IE fiind bisectoarea unghiului AIB, perpendiculara IG pe IE va fi bisectoarea unghiului suplimentar AID; b. se observă că IC = ID, deci GA:GD = IA:IC = IA:ID, deci G este piciorul bisectoarei din I pe AD.

Soluţii date de d-nii: *Aman V. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Anastasescu M. Mihail* (Ploeşti), *Andrunachievici Al. Vladimir* (stud., Iaşi), *Berinde L. Titus* (Şc. Polit., Timişoara), *Cetăţeanu Stelian* (lic. Şincai, Bucureşti), *Cernat Camil* (lic. Milit., N. Filipescu), *Cristescu Dan* (lic. Braşov), *Dăscălescu St. Hristache* (Focşani), *Leonida Djebcu* (Râşcani, Bălţi), *Lupescu Corneliu* (Sub-Lt), *Matei D. Dumitru* (lic. internat, Iaşi), *Medeleanu Ion*, *Modâlcă S. Emil* (lic. T-Severin), *Motăş Camil* (lic. Internat, Iaşi), *Murgu V. Marţian*, *Popescu V. Florian* (Şc. Polit., Bucureşti), *Popescu-Zorica N. Alexandru* (Bucureşti), *Rosenblatt Millu* (lic. Internat, Iaşi), *Roth I. Alexandru* (lic Arad), *Solomon I. Isac* (lic. Internat, Iaşi), *Stamate I. Ion* (lic. Lugoj), *Stoenescu D. Mirel* (lic. Milit., N. Filipescu), *Theodorescu N. Dorin* (lic. Mil. N. Filipescu), *Tica P. Marin-Gall*, *Tilică C. Ştefan* (lic. T-Severin) şi *Vlad M. I.* (Lt.)

N. M.

1593. — *Să se arate că într'un triunghiu oarecare există relaţia:*

$$\cos B = \frac{\cos B + \cos C}{1 - \cos A} + \frac{\sin B(\cos B - \cos C)}{\sin B - \sin C}.$$

Aplicaţie. 1°. A = 0; 2°. B = C; 3°. A = B + C

L-T. C. IONESCU-ŢIU

Insemnând cu E membrul al 2-lea şi transformând în produse termenii fracţiilor, avem succesiv:

$$E = \frac{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin^2\frac{A}{2}} - \frac{2\sin B\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}.$$

Ţinând seamă că

$$\sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B+C}{2},$$

arcele $\frac{A}{2}$, $\frac{B+C}{2}$ fiind complimentare, expresiunea E simplificată devine:

$$(1)\quad E = \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}} - \frac{\sin B\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}} = \frac{\cos\frac{B-C}{2} - \sin B\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}.$$

De altă parte observăm că avem:

$$(2)\quad \cos\frac{B-C}{2} = \cos\left(B - \frac{B+C}{2}\right) = \cos B\cos\frac{B+C}{2} + \sin B\sin\frac{B+C}{2},$$

astfel că expresiunea E se mai poate scri:

$$E = \frac{\cos B\cos\frac{B+C}{2} + \sin B\sin\frac{B+C}{2} - \sin B\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}$$

Ultimii doi termeni de la numărător se reduc şi simplificând apoi prin $\cos\frac{B+C}{2}$, găsim:

$$E = \cos B.$$

Relaţia dată este astfel stabilită.

Aplicaţii. 1°. Dacă A = 0, vârfurile triunghiului sunt colineare, iar B + C = 180°. De aci rezultă: cos C = − cos B, sin C = sin B.

Membrul al 2-lea al relaţiei cerute, ia forma,

$$\frac{\cos B - \cos B}{0} + \frac{\sin B(\cos B + \cos B)}{\sin B - \sin B} = \frac{0}{0} \pm \infty,$$

iar adevărata valoare este *cos B*.

2°. *Dacă* $B = C$, triunghiul este isoscel şi membrul al 2-lea al relaţiei cerute, ia forma,

$$\frac{2\cos B}{1-\cos A}+\frac{0}{0},$$

iar adevărata valoare este $\cos B$.

3°. Dacă $A = B + C$, rezultă $A = 90°$, căci $A + B + C = 180°$ şi $A - B - C = 0$. Triunghiul considerat este dreptunghiu. Fiindcă $B + C = 90°$, rezultă $\cos C = \sin B$ şi $\sin C = \cos B$. Membrul al 2-lea al relaţiei cerute, devine,

$$\cos B + \sin B + \frac{\sin B(\cos B - \sin B)}{\sin B - \cos B} = \cos B.$$

Soluţii date de d-nii: *Berinde L. Titus* (Şc. Polit, Timişoara), *Diaconescu Ion* (lic. T-Severin), *Popescu-Zorica N. Alexandru* (Bucureşti) şi *Reicher H.* (lic. Internat, Iaşi).

1608. — *Să se verifice identitatea:*

$$\sqrt{2+2\cos\theta}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\theta}}\times\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\theta}}}=\frac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{8}}.$$

MIHAIL BOTEZ

Se observă cu uşurinţa că putem scri:

$$\sqrt{2+2\cos\theta}=\sqrt{2(1+\cos\theta)}=\sqrt{2\ 2\cos^2\frac{\theta}{2}}=2\cos\frac{\theta}{2},$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\theta}}=\sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2}}=\sqrt{2.2\cos^2\frac{\theta}{4}}=2\cos\frac{\theta}{4},$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\theta}}}=\sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{4}}=\sqrt{2.2\cos^2\frac{\theta}{8}}=2\cos\frac{\theta}{8}.$$

Inmulţind aceste trei relaţii şi notând cu E primul membru al identităţii date, obţinem:

$$E = 8\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{8}.$$

Inmulţind cu $\sin\frac{\theta}{8}$ ambii membrii, avem succesiv:

$$\sin\frac{\theta}{8}\cdot E = 4\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\cdot\left(2\sin\frac{\theta}{8}\cos\frac{\theta}{8}\right)=$$

$$4\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\sin\frac{\theta}{4}=2\cos\frac{\theta}{2}\cdot\left(2\sin\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{4}\right)=$$

$$2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}=\sin\theta.$$

De aci deducem:

$$E=\frac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{8}}$$

şi identitatea este verificată.

Soluţii date de d-nii: *Andrievici N.*, *Andrunachievic Al. Vladimir* (student, Iaşi), *Apostol Radu* (lic. Milit, N Filipescu), *Begu I. Ştefan* (Şc. Polit., Bucureşti), *Berinde L. Titus* (Şc. Polit, Timişoara), *Cetăţianu Stelian* (lic. Şincai, Bucureşti), *Dăscălescu Şt. Hristache* (Focşani), *Diaconescu D. Ion* (lic. T-Severin), *Diaconescu Marcel* (lic. Milit., N. Filipescu), *Florescu Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Gloden A.* (Luxembourg), *Jidanu I. C.* (lic. Beiuş), *Matei D-tru* (bacalaureat, Iaşi), *Modâlcă S. Emil* (lic. T-Severin), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Petrescu C. Alin* (lic. Milit., Filipescu), *Popescu-Zorica N. Alexandru* (Bucureşti), *Popoviciu Mircea* (lic Lugoj), *Rădulescu Gh. Octavian* (lic. Milit., N. Filipescu). *Reicher L. Herman* (lic. Internat, Iaşi), *Rosenblatt S. Millu* (lic. Internat, Iaşi), *Şandor Vasile*, *Săruleşteanu I. E.*, *Segal Zigu* (lic. Vaslui), *Solomon Isac* (lic. Internat, Iaşi), *Stamate I. Ionel* (lic Lugoj), *Ştefănescu F. Marin* (Sub-Lt), *Ştefănescu D. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu), *Stoenescu D. Mirel* (lic. Milit, N. Filipescu) şi *Tilică C. Ştefan* (lic. T.-Severin).

Observare. Autorul problemei, precum şi d-nii: *Andrunachievici Al. Vladimir*, *Apostol Radu*, *Dăscălescu Şt. Hristache*, *Florescu Victor*, *Sărulesteunu I. E.*, *Segal Zigu* şi *Solomon I. Isac*, au stabilit în acelaşi mod ca mai sus *următoarea identitate mai generală:*

$$\sqrt{2+2\cos\theta}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\theta}}\cdots\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\cdots+\sqrt{2+2\cos\theta}}}}=\frac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2^n}},$$

n fiind numărul factoriior din primul membru.

1616. — *Să se rezolve ecuaţiunea:*

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\sin 3x}=2.$$

LT C D IONESCU-ŢIU

Aducem la acelaşi numitor şi avem,

$$\sin 3x - \sin x = 2\sin x\sin 3x,$$

sau:

$$2\sin x\cos 2x = 2\sin x\sin 3x.$$

De aci deducem:

$$(1)\quad \sin x = 0, \qquad (2)\quad \cos 2x = \sin 3x.$$

Ecuaţia (1) nu ne poate da soluţii pentru ecuaţia dată, care se mai poate scri,

$$\frac{1}{\sin x}\left(1 - \frac{1}{3 - 4\sin^2 x}\right) = 2,$$

fiind că primul membru devine infinit pentru $\sin x = 0$.

Rămâne să rezolvim ecuaţia (2); ea se mai poate scri:

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right).$$

De aci deducem ecuaţiile:

$$2x - \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = 2k\pi$$

$$2x + \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Rezolvind aceste ecuaţii obţinem respectiv soluţiile:

$$x = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{5},$$

$$x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

1°. Au soluţionat în acest fel d-nii: *Armencea C.* (lic. Milit., N. Filipescu) şi *Reicher L. H.* (lic. Internat, Iaşi) fără însă a indepărta soluţia, $\sin x = 0$.

2°. D-nii: *Cetăţeanu Stelian* (lic. Şincai, Bucureşti), *Diaconescu D. Ion* (lic. T-Severin) şi *Modâlcă S. Emil* (lic. T-Severin), după ce au ajuns la ecuaţia (2) au transformat diferenţa, $\cos 2x - \sin 3x$, în produs.

3°. Au dat soluţii mai lungi, scăpând de numitor şi folosind relaţia

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,$$

care a condus la ecuaţia de gradul al 3-lea,

$$4\sin^3 x - 2\sin^2 x - 3\sin x + 1,$$

ce a trebuit să fie rezolvată, d-nii: *Anastasescu M. Mihail* (bacalaureat, Ploeşti), *Andrievici N.* (lic Milit., N. Filipescu), *Begu I. Ştefan* (Şc. Polit., Bucureşti), *Buznea D. Dinu* (lic. Milit, N. Filipescu), *Dăscălescu Şt. Hristache* (Focşani), *Diaconescu Marcel* (lic. Milit., N. Filipescu), *Jidanu I. C-tin* (lic. Beiuş), *Lepolszky Carol* (bacalaureat), *Milu I. Nicolae* (Şc. Navală, Constanţa), *Motâş Camil* (lic. Internat, Iaşi), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Pasere Emil* (lic. Milit., Tg-Mures), *Popa D. Mircea* (lic. Milit, Iaşi), *Popoviciu Mircea* (lic. Lugoj), *Roth I. Alexandru* (lic. Arad), *Segal Zigu* (lic. Vaslui), *Segal Joe* (Bucureşti), *Setmereanu Horia* (lic. Orăştie), *Slavov Iacob* (Bolgrad), *Solomon I. Isac* (lic. Internat, Iaşi), *Staicu I. N.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Stamate I. Ionel* (lic. Lugoj), *Ştefănescu F. Marin* (Sub-Lt), *Stoenescu D. Mirel* (lic. Militar, N. Filipescu), *Theodorescu N. Dorin* (lic. Milit, N. Filipescu), *Tilică C. Ştefan* (lic. T-Severin) şi *Turcu R. Sandu* (lic Milit, Iaşi).

1623. — *Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se stabilească identităţile:*

$$\frac{2r(p-a)}{(r+p-a)^2} = \frac{a}{a+2R} = \frac{2pr_a}{(p+r_a)^2}.$$

V. ALACI

1. Folosim relaţiile cunoscute,

$$r = (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}, \qquad \sin A = \frac{a}{2R}$$

şi avem succesiv:

$$\frac{2r(p-a)}{(r+p-a)^2} = \frac{2(p-a)^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{\left[(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2} + p - a\right]^2} =$$

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+1\right)^2} = \frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2} =$$

$$\frac{\sin A}{1+\sin A} = \frac{\frac{a}{2R}}{1+\frac{a}{2R}} = \frac{a}{a+2R}.$$

Prima identitate este astfel stabilită.

2. Dacă în relaţia găsită mai sus,

$$\frac{2r(p-a)}{(r+p-a)^2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)^2},$$

folosim relaţia cunoscută,

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r_a}{p},$$

obţinem:

$$\frac{2r(p-a)}{(r+p-a)^2} = \frac{2\frac{r_a}{p}}{\left(1+\frac{r_a}{p}\right)^2} = \frac{2pr_a}{(p+r_a)^2}.$$

Avem astfel stabilită şi a 2-a identitate.

Soluţii date de d-nii: *Andrievici N.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Andrunachievici Al. Vladimir* (student, Iaşi), *Buznea D. Dinu* (lic. Milit, N. Filipescu), *Cetăţeanu Stelian* (lic. Şincai, Bucureşti), *Dăscălescu Şt. Hristache* (Focşani),

Diaconescu D. Ion (lic. T-Severin), *Gloden A.* (Luxembourg), *Jidanu C-tin* (lic. Beiuş), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Modâlcă S. Emil* (lic. T-Severin), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Popescu Adrian* (Sub-Lt), *Reicher L. Herman* (lic. Internat, Iaşi), *Roth I. Alexandru* (lic. Arad) *Săruleşteanu I. Emanoil* (Bucureşti), *Segal Joe* (lic. Libros, Bucureşti), *Stefănescu F. Marin* (Sub-Lt), *Stoenescu D. Mirel* (lic. Milit., N. Filipescu) şi *Tilica C. Ştefan* (lic. T-Severin).

PROBLEME PROPUSE

1689. — Să se găsească un patrat de cinci cifre, astfel că micşorându-i cifra miilor cu o unitate el devine de forma $a\,b\,c\,b\,a$.

A. GLODEN

1690. — Vârsta tătălui meu este cu 30 de ani mai mare ca vârsta mea. Ştiind că suma dintre vârsta tatălui meu şi vârsta mea este un patrat perfect, la care adunându-i de 10 ori rădăcina patrată obţinem tot un patrat perfect, se cere vârsta tătălui meu şi a mea.

C-TIN I. JIDANU

1691. — Ştiind că,

$$a(bc-a^2)+b(ac-b^2)+c(ab-c^2)=0,$$

să se stabilească relaţia:

$$\frac{a(a-bc)^2+b(b-ac)^2+c(c-ab)^2}{a^2(a-bc)+b^2(b-ac)+c^2(c-ab)}=1+\frac{ab+bc+ca}{3}.$$

SUB-LT M. GRUMAZESCU

1692. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x+y+z+xyz=0 \\ \Sigma x^2yz=-4 \\ 3xyz+\Sigma xy(x+y)=-2 \end{cases}$$

MARCEL DIACONESCU

1693. — Având,

$$x+y=180^0,$$

se cere să se afle adevărata valoare a expresiunei:

$$E=\frac{\cos x+\cos y}{2\cos^2\frac{x+y}{2}}+\frac{\sin x(\cos x-\cos y)}{\sin x-\sin y},$$

pentru $x=a$.

V. ALACI

1694. — In triunghiul dreptunghiu ABC se notează cu D proecţia vârfului A pe ipotenuza BC şi cu L şi M punctele unde o dreaptă paralelă cu BC taie respectiv catetele AB şi AC. Fie N simetricul punctului M faţă de mijlocul laturei AC.

Să se arate că triunghiul DLN este dreptunghic în D şi să se studieze variaţia suprafeţei lui în funcţie de unghiul $BDL=\theta$.

VASILE VASU

1695. — Se dă un punct F şi o dreaptă Δ pe care se mişcă punctul M. Fie A şi B punctele care împart într'un raport dat segmentul FM. Se cere:

1°. Locul centrului cercului de diametru AB.

2°. Invelitoarea polarei lui M faţă de acest cerc.

3°. Locul punctelor de întâlnire ale acestui cerc cu diametrul perpendicular pe Δ.

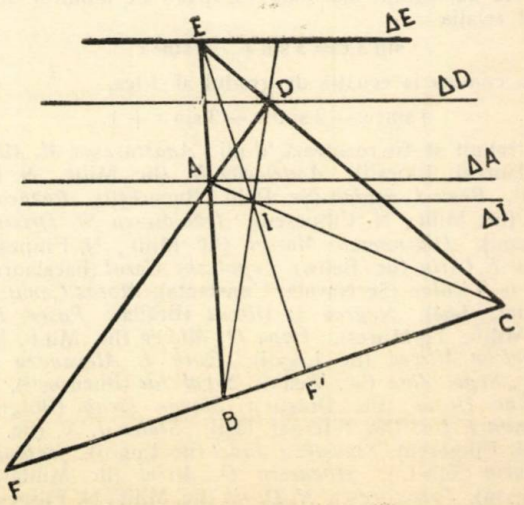
G-L GH. BUICLIU

1696 — Să se arate că:

$$\sin 4x\cos(x+30^0)\cos(x-30^0)=\cos 2x\cos x\sin 3x.$$

N. N. MIHAILEANU

Complectare. Aceasta este figura de la problema 1291, din numărul trecut, care nu a sosit atunci la timp de la zincografie.



INFORMAŢIUNI

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL XI-LEA

care a început în Martie 1938.

Costul *special* a unui abonament este de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Pentru anul al XI, care a inceput în Martie 1938, s'a primit până acum la Redacţia „R. M. T." următorul abonament:

1. *Prof. Sergescu P.*, Universitatea, Cluj.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecţia R. M. T., anul XV, în volum şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS:
1 an: Belgique, **30 fr.** France, **25 fr.**
Etranger, 7 **belgas**

Administration:
SPHINX, Bruxelles 173, Avenue Longchamp

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XVII, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

Abonamentul pe anul XVIII-lea al revistei, care a început cu numărul 1 la 15 Martie 1938, costă 100 (UNA SUTA LEI) şi se trimite prin contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal pe adresa: Prof. C. TEODORESCU, rectorul Şcoalei Politechnice, Timişoara.

ANUL XVIII. 15 AUGUST 1938 No. 6.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. GH. CONSTANTINESCU: SOLUTIUNILE INTREGI ALE ECUATIUNII, $x^2-10^n\ y^2=z$.
2. NOTE MATEMATICE: 9, 10, 11, 12.
3. PROBLEME REZOLVATE: 1559, 1591, 1598 1599, 1611.
4. PROBLEME PROPUSE: 1697-1703.
5. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVIII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVIII inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XVIII — NO. 6 TIMISOARA, 15 AUGUST 1938

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

SOLUȚIUNILE ÎNTREGI ALE ECUAȚIUNII $x^2 - 10^n y^2 = z$.

DE
PROF. GH. CONSTANTINESCU

Soluțiunile acestei ecuații diferă după cum n este par sau impar și deci trebue studiate fiecare în parte.

I. Când n este par, ecuațiunea se descompune în:

$$(x + 10^n y)(x - 10^n y) = z$$

și dacă punem pe $z = p \cdot q$, vom avea:

$$x + 10^n y = p,$$
$$x - 10^n y = q,$$

din care deducem:

$$x = \frac{p+q}{2} \quad \text{și} \quad y = \frac{p-q}{2.10^n}.$$

Pentru a avea valori întregi pentru x și y trebue să avem:

$$p = k \cdot 10^n + r,$$
$$q = k' \cdot 10^n + r,$$

unde k și k' sunt de aceiaș paritate.

Rezultă că ecuațiunea

$$x^2 - 10^{2n} y^2 = z,$$

va avea soluțiuni numai când z va fi de forma

$$z = (k \cdot 10^n + r)(k' 10^n + r).$$

Vom face o aplicare a acestei probleme de găsirea patratelor berce. D-nul Gen. *Gh. Buicliu*, numește patrate berce, două patrate cari se deduc unul din altul prin tăerea unui număr oarecare de cifre dela dreapta celuilalt.

Cum sunt de exemplu în numerile

$2563201 = 1601^2$, $3721041 = 1929^2$, unde $3721 = 61^2$

$2594601 = 2301^2$, $900601 = 949^2$.

In cele ce urmează vom găsi soluțiunile, chiar în cazul general și vom arăta că numărul soluțiunilor sunt limitate când n este par și nelimitate când n este impar.

In cazul când n este par însemnăm cu x^2 un pătrat perfect, cu y^2 pătratul rămas după ce am tăiat din primul $2n$ cifre și cu z însemnăm numărul format din cele $2n$ cifre tăiate din x^2. Vom avea imediat relațiunea:

$$10^{2n} y^2 + z = x^2,$$

care este exact ecuațiunea studiată, cu deosebirea că trebue să punem condițiunea $z < 10^{2n}$.

Pentru ca această condițiune să fie implinită, trebue neapărat să avem $k' = 0$ și în acest caz valorile lui p și q vor fi:

$$p = 2k \cdot 10^n + r, \qquad q = r,$$

unde

$$k \leq \frac{10^n}{2} - 1.$$

Limita lui k fiind stabilită, putem determina și limita lui r la un k dat. Din relațiunea:

$$z = r(2k \cdot 10^n + r) < 10^{2n},$$

găsim

$$r < E\left[10^n(\sqrt{k^2+1} - k)\right],$$

unde E inseamnă numărul întregilor cuprinși în expresiunea din paranteză.

Rezultă că pentru a găsi toate patratele berce corespunzătoare la un n dat, trebue să dăm lui k toate valorile cuprinse între 1 și $\frac{10^n}{2} - 1$ și apoi la fiecare valoare a lui k trebue să variem pe r dela unu până la limita superioară dată de expresiunea

$$E\left[10^n(\sqrt{k^2+1} - k)\right].$$

Se poate găsi chiar numărul soluţiunilor pentru un n dat.

Din modul cum s'a găsit soluţiunile, deducem că numărul soluţiunilor este dat de formula

$$N = \sum_{k=1}^{k=\frac{10^n}{2}-1} E\left[10^n\left(\sqrt{k^2+1}-k\right)\right].$$

In acest număr se cuprind şi soluţiunile cari se termină cu un număr pereche de zeruri. Alăturăm aici tabloul cu patratele berce corespunzătoare pentru $n=2$ şi 4 şi din el se vede că pentru $n=2$ avem 8 soluţiuni, iar pentru $n=4$ avem 190 soluţiuni.

Patrate Berce pentru, $n=2$:

k	p	q	x	y	z
1	21	1	11	1	21
	22	2	12	1	44
	23	3	13	1	69
	24	4	14	1	96
2	41	1	21	2	41
	42	2	22	2	84
3	61	1	31	3	61
4	81	1	41	4	81

$n=4$.

k	p	q	x	y	z
1	201	1	101	1	201
	222	2	102	1	404
	241	41	141	1	9881
2	401	1	201	2	401
	402	2	202	2	804
	423	23	223	2	9729
3	601	1	301	3	601
	602	2	302	3	1204
	616	16	316	3	9856
4	801	1	401	4	801
	802	2	402	4	1604
	812	12	412	4	9664
5	1001	1	501	5	1001
	1002	2	502	5	2004
	1009	9	509	5	9081
6	1201	1	601	6	1201
	1202	2	602	6	2404
	1208	8	608	6	9664
7	1401	1	701	7	1401
	1402	2	702	7	2804
	1407	7	707	7	9849
8	1601	1	801	8	1601
	1602	2	802	8	3204
	1606	6	806	8	9636
9	1801	1	901	9	1801
	1802	2	902	9	3604
	1805	5	905	9	9025
10	2001	1	1001	10	2001
	2002	2	1002	10	4004
	2003	3	1003	10	6009
	2004	4	1004	10	8016
11	2201	1	1101	11	2201
	2202	2	1102	11	4404
	2203	3	1103	11	6609
	2204	4	1104	11	8816
12	2401	1	1201	12	2401
	2402	2	1202	12	4804
	403	3	1203	12	7209
	2404	4	1204	12	9616
13	2601	1	1301	13	2601
	2602	2	1302	13	5204
	2603	3	1303	13	7809
14	2801	1	1401	14	2801
	2802	2	1402	14	5604
	2803	3	1403	14	8409
15	3001	1	1501	15	3001
	3002	2	1502	15	6004
	3003	3	1503	15	9009
16	3201	1	1601	16	3201
	3202	2	1602	16	6404
	3203	3	1603	16	9609
17	3401	1	1701	17	3401
	3402	2	1702	17	6804
18	3601	1	1801	18	3601
	3602	2	1802	18	7204
19	3801	1	1901	19	3801
	3802	2	1902	19	7604
20	4001	1	2001	20	4001
	4502	2	2002	20	8004
21	4201	1	2101	21	4201
	4202	2	2102	21	8404
22	4401	1	2201	22	4401
	4402	2	2202	22	8804
23	4601	1	2301	23	4601
	460 :	2	2302	23	9204
24	4801	1	2401	24	4801
	4802	2	2402	24	9604
25	5001	1	2501	25	5001
26	5201	1	2601	26	5201
27	5401	1	2701	27	5401
28	5601	1	2801	28	5601
29	5801	1	2901	29	5801
30	6001	1	3001	30	6001
31	6201	1	3101	31	6201
32	6401	1	3201	32	6 01
33	6601	1	3301	33	6601
34	6801	1	3401	34	6801
35	7001	1	3501	35	7001
36	7201	1	3601	36	7201
37	7401	1	3701	37	7401
38	7601	1	3801	38	7601
39	7801	1	3901	39	7801
40	8001	1	4001	40	8001
41	8201	1	4101	41	8201
42	8401	1	4201	42	8401
43	8601	1	4301	43	8601
44	8801	1	4401	44	8801
45	9001	1	4501	45	9001
46	9201	1	4601	46	9201
47	9401	1	4701	47	9401
48	9601	1	4801	48	9601
49	9801	1	4901	49	9801

II. In cazul n impar, ecuaţiunea $x^2-10^{2n+1}y^2=z$ admite o infinitate de soluţiuni pentru un z dat.

Dacă x, y şi z este o soluţie a acestei ecuaţiuni, x_1, $10^n y_1$ şi z_1 va fi o soluţie a ecuaţiunei $x^2-10y^2=z$, rezultă deci că mai întâi trebue găsite soluţiile ecuaţiei $x^2-10y^2=z$ şi apoi printre acestea să găsim soluţiunile ecuaţiunei $x^2-10^{2n+1}y^2=z$.

Pentru rezolvarea acestei a 2-a ecuaţiuni, vom determina mai întâi condiţiunea necesară şi suficientă ce trebuia să o îndeplinească z, pentru ca ecuaţia să aibă soluţiuni şi apoi vom găsi soluţiunile ecuaţiunii.

In teoria formelor patratice se dovedeşte că z trebue să fie prim şi să aibe pe 10 ca rezidiu quadratic, pentru ca una din următoarele două ecuaţiuni $x^2-10y^2=z$, sau $2x^2-5y^2=z$ să aibă soluţiuni întregi. Valorile prime ale lui z pentru care 10 este un rezidiu quadratic le-am găsit în R. M. T., anul XV, pag. 139 şi sunt numerile prime cuprinse în următoarele 8 progresii aritmetice $40m\pm1$, $40m\pm3$, 40 ± 9, $40m\pm13$.

Din ecuaţia $x^2-10y^2=z$ deducem că $x^2\equiv z \pmod{10}$ şi deci numai numerile prime cuprinse în progresiile $40m\pm1$ şi $40m\pm9$ dau soluţiuni pentru ecuaţia $x^2-10y^2=z$, iar numerile prime

cuprinse în progresiile $40m \pm 3$ şi $40m \pm 13$ dau soluţiuni întregi pentru ecuaţia $2x^2 - 5y^2 = z$.

In modul acesta am determinat valorile prime ale lui z pentru care ecuaţia $x^2 - 10y^2 = z$ are soluţiuni întregi, însă ecuaţia aceasta are soluţiuni şi pentru z compus din factori primi, aceste valori ale lui z vor rezulta din următoarele:

1. In cazul când z este prim, ecuaţia $x^2 - 10y^2 = z$ se rezolvă cum am aratat în „R. M. T.“, anul XVI şi anume se rezolvă congruenţa $x^2 = z$ (mod. 10) şi dacă x_0 este o soluţie a acestei congruenţe, se încearcă toate valorile lui x de forma $x = 10m \pm x^0$ cuprinse în intervalul $\sqrt{z}$ şi $\sqrt{10z}$ şi se găseşte neapărat una x_1, la cari corespunde pentru y o valoare y_1, cari sunt o soluţie a ecuaţiei, apoi cu numerile x_1 şi y_1 şi cu u şi v soluţiile ecuaţiunei $u^2 - 10v^2 = 1$ găsim cu ajutorul formulelor

$$x = ux_1 \pm 10vy_1$$
$$y = uy_1 \pm vx_1$$

toate soluţiile ecuaţiei $x^2 - 10y^2 = z$.

2. Când z este prim şi face parte din progresiile

$40m \pm 1$, $40m \pm 9$, ecuaţia $x^2 - 10y^2 = z^n$

are două feluri de soluţiuni, unele cari sunt prime între ele pe cari le numim soluţiuni proprii, iar altele cari au un divizor comun pe cari le numim soluţiuni improprii.

Dacă x_1 şi y_1 este o soluţiune redusă a ecuaţiunei

$$x^2 - 10y^2 = z,$$

prin ridicarea la patrat a egalităţei

$$x_1^2 - 10y_1^2 = z,$$

găsim:

$$(x_1^2 - 10y_1^2)^2 = (x_1^2 \pm 10y_1^2)^2 - 10(x_1y_1 \pm x_1y_1)^2 = z^2,$$

din care rezultă că ecuaţia $x^2 - 10y^2 = z^2$ are două soluţiuni:

$$(1)\quad \begin{cases} x_2 = x_1^2 + 10y_1^2 \\ y_2 = 2x_1y_1, \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} x_2' = x_1^2 - 10y_1^2 \\ y_2' = 0. \end{cases}$$

Prima este proprie şi a 2-a improprie. Din înmulţirea egalităţilor

$$x_1^2 - 10y_1^2 = z, \qquad x_2^2 - 10y_2^2 = z^2,$$

găsim:

$$(x_1^2 - 10y_1^2)(x_2^2 - 10y_2^2) =$$
$$(x_1x_2 \pm 10y_1y_2)^2 - 10(x_1y_2 \pm y_1x_2)^2 = z^3,$$

din care rezultă că ecuaţia $x^2 - 10y^2 = z^3$ are două soluţii:

$$\begin{cases} x_3 = x_1x_2 + 10y_1y_2 \\ y_3 = x_1y_2 + y_1x_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = x_1x_2 - 10y_1y_2 \\ y_4 = x_1y_2 - y_1x_2. \end{cases}$$

Dacă inlocuim pe x_2 şi y_2 cu valorile lor soluţiile acestei ecuaţii se reduc la:

$$\begin{cases} x_3 = x_1(x_1^2 + 30y_1^2) \\ y_3 = y_1(3x_1^2 + 10y_1^2), \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = x_1(x_1^2 - 10y) \\ y_4 = y_1(x_1^2 - 10y_1^2). \end{cases}$$

Prima este proprie şi cea de a doua este improprie. In acelaş mod se continuă şi se găsesc soluţiile proprii şi inproprii ale ecuaţiunei,

$$x^2 - 10y^2 = 10^n.$$

3. Ecuaţia $x^2 - 10y^2 = z$ are soluţiuni şi când z este compus din factori primi care fac parte din progresiile $40m \pm 1$ şi $40m \pm 9$. Să însemnăm cu x_i şi y_i soluţia redusă a ecuaţiei $x^2 - 10y^2 = z_i$.

Din înmulţirea egalităţilor

$$x_1^2 - 10y_2 = z_1, \qquad x_2^2 - 10y_2^2 = z_2,$$

găsim:

$$(x_1^2 - 10y_1^2)(x_2^2 - 10y_2^2) =$$
$$(x_1x_2 \pm 10y_1y_2)^2 - 10(x_1y_2 \pm y_1x_2)^2 = z_1z_2,$$

din care rezultă că ecuaţia $x^2 - 10y^2 = z_1z_2$ are două soluţiuni.

Din înmulţirea egalităţilor,

$$x_1^2 - 10y_1^2 = z_1, \quad x_2^2 - 10y_2^2 = z_2, \quad x_3^2 - 10y_3^2 = z_3,$$

vom găsi că ecuaţia $x^2 - 10y^2 = z_1z_2z_3$ are 4 soluţiuni.

In acelaş mod se procedează şi se găseşte că ecuaţia $x^2 - 10y^2 = z_1z_2 \ldots z_k$ are 2^{k-1} soluţiuni, cari toate sunt proprii, dacă z_i sunt toţi primi. Din cele arătate până acum reese că ecuaţia $x^2 - 10y^2 = z$ are soluţiuni în cazul când z este compus din factori primi, cari să fie cuprinşi în progresiile $40m \pm 1$ şi $40m \pm 9$.

4. Dacă x_1, y_1 şi x_2, y_2 sunt câte o soluţie redusă a ecuaţiunilor $2x^2 - 5y^2 = z_1$ şi $2x^2 - 5y^2 = z_2$, unde z_1 şi z_2 sunt numere prime cuprinse în progresiile $40m \pm 3$ şi $40m \pm 13$, din înmulţirea următoarelor egalităţi:

$$2x_1^2 - 5y_1^2 = z_1 \quad \text{şi} \quad 2x_2^2 - 5y_2^2 = z_2,$$

găsim

$$(2x_1^2 - 5y_1^2)(2x_2^2 - 5y_2^2) =$$

$$(2x_1x_2 \pm 5y_1y_2)^2 - 10(x_1y_2 \pm y_1x_2)^2 = z_1z_2.$$

Din aceasta rezultă că ecuaţia $x^2 - 10y^2 = z_1z_2$ are două soluţiuni reduse cu toate că z_1 şi z_2 fac parte din progresiile $40m \pm 3$ şi $40m \pm 13$.

Dacă am ridica pe $x^2 - 10y^2 = z_1z_2$ la patrat, am găsi că ecuaţia $x^2 - 10y^2 = (z_1z_2)^2$ are soluţiuni şi în acelaş mod am găsi că ecuaţia $x^2 - 10y^2 = (z_1z_2)^n$ are soluţiuni.

Rezultă deci în general că pentru ca ecuaţia $x^2 - 10y^2 = z$ să aibă soluţiuni, trebue ca z să fie compus din orce factori primi la orce puteie, cari să fie daţi de progresiile $40m \pm 1$ şi $40m \pm 9$ şi din factori primi daţi de progresiile $40m \pm 3$ şi $40m \pm 13$ cu condiţiunea ca numărul lor să fie par. Ecuaţia mai are soluţiuni când z cuprinde orce factori la puteri pare.

5. Soluţiunile ecuaţiei $2x^2 - 5y^2 = z$ se găsesc în modul următor:

Ecuaţia $2x^2 - 5y^2 = 2$ are o soluţie $x' = 1$, $y' = 0$ şi din înmulţirea egalităţilor $2x'^2 - 5y'^2 = 2$ şi $2x^2 - 5y^2 = z$, găsim

$$(2xx' \pm 5yy')^2 - 10(xy' \pm yx')^2 = 2z.$$

Rezultă că ecuaţia $x^2 - 10^2 = 2z$ are ca soluţiuni

$$X = 2xx' \pm 5yy', \qquad Y = xy' \pm yx',$$

Facem pe $x' = 1$ şi $y' = 0$ şi găsim:

$$x = \frac{X}{2} \quad \text{şi} \quad y = Y.$$

Soluţiunile X şi Y ale ecuaţiei $X^2 - 10Y^2 = 2z$ le cunoaştem şi deci din ele deducem şi soluţiile ecuaţiei $2x^2 - 5y^2 = z$.

(Va urma)

NOTE MATEMATICE

9. — *Asupra problemei 1619.* In soluţia dată acestei probleme la pag. 47, d-l *A. Moessner* afirmă că soluţia generală a sistemului

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} x + y + z &= a + b + c, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

este

$$x = R - a, \qquad y = R - b, \qquad z = R - c,$$

unde

$$R = \frac{2}{3}(a + b + c).$$

De fapt acesta este o soluţie particulară a sistemului dat, după cum uşor se constată cu exemplele date tot de d-sa în Nota 6 dela pag. 44.

Iată o schiţă a soluţiei generale.

Presupunând că x, y, z ar fi coordonatele unui punct M din spaţiu, se vede uşor că M se află pe cercul de intersecţie al sferei şi planului reprezentate de ecuaţiile sistemului.

Este iarăş uşor de văzut că punctele

$$M_1(a, b, c), \qquad M_2(b, c, a), \qquad M_3(c, a, b)$$

nu sunt colineare, dar aparţin planului dat. Rezultă că orice punct M al planului va avea coordonatele

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned} x &= \alpha a + \beta b + \gamma c, \\ y &= \alpha b + \beta c + \gamma a, \\ z &= \alpha c + \beta a + \gamma b, \end{aligned}$$

unde $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Pentruca M să se afle şi pe sferă, va trebui ca să avem şi

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0,$$

ceia ce arată că soluţia generală (B) a sistemului (A) depinde de soluţia generală a sistemului

$$\text{(C)} \qquad \begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 1, \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1. \end{aligned}$$

Se vede uşor că, în aceste condiţiuni, α, β, γ sunt rădăcinile unei ecuaţii de forma

$$\text{(D)} \qquad u^3 - u^2 + \lambda^2 = 0,$$

în care λ este un parametru variabil, astfel ca $\lambda^2 \leq \frac{4}{27}$, pentru ca toate rădăcinile ecuaţiei (D) să fie reale.

Soluţia generală a sistemului (A) va depinde deci de un parametru λ, a cărui variaţie este însă limitată.

Soluţia d-lui *A. Moessner* corespunde la

$$\alpha = -\frac{1}{3}, \qquad \beta = \gamma = \frac{2}{3},$$

adică tocmai cazului când (D) are o rădăcină dublă

In mod analog se găseşte că soluţia generală a sistemului

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,$$
$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$$

este

$$x_1=\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\cdots+\alpha_n a_n,$$
$$x_2=\alpha_2 a_1+\alpha_3 a_2+\cdots+\alpha_1 a_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n=\alpha_n a_1+\alpha_1 a_2+\cdots+\alpha_{n-1} a_n,$$

unde α_i sunt rădăcinile unei ecuaţii de forma

$$u^n-u^{n-1}+\lambda_1 u^{n-3}+\lambda_2 u^{n-4}+\cdots+\lambda_{n-2}=0,$$

parametrii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-2}$ fiind supuşi condiţiunii ca această ecuaţie să aibă toate rădăcinile reale. La această ecuaţie conduc între altele condiţiile, analoage cu (C)

$$\Sigma\alpha_i=1, \qquad \Sigma\alpha_i^2=1.$$

Mai semnalez, cu această ocaziune, că proprietatea *a.* din Nota d-lui *A. Moessner* este adevărată *oricare ar fi x,* ceia ce o face şi mai interesantă.

M. GHERMANESCU

---

10. — *Soluţia generală, raţională, a problemei 1619.*

1. In nota precedentă, d-l profesor *M. Ghermănescu,* arată clar că soluţia de la pag. 47, „R. M. T.", anul XVIII, dată de d-l *A. Moessner,* nu este soluţia generală a sistemului,

$$(1)\qquad \begin{cases} x+y+z=a+b+c \\ x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2 \end{cases}$$

din problema 1619. D-sa schiţează mai departe, destul de interesant de astfel, cum s'ar putea obţine soluţia generală, raţională a sistemului (1) şi arată că această soluţionare depinde de rezolvarea, raţională a sistemului mai simplificat,

$$(2)\qquad \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=1 \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1, \end{cases}$$

sistem pe care d-sa însă nu l'a soluţionat, efectiv.

Tocmai faptul acesta al soluţionării raţionale a sistemului (2), care prezintă în fond aceleaşi dificultăţi, ca rezolvarea raţională a sistemului iniţial (1), dacă ar trebui soluţionată, raţional ecuaţia de gradul 3-lea (D) din nota d-sale, m'a îndemnat să urmez o altă cale, *pentru a găsi soluţia generală raţională, a sistemului* (1) şi am reuşit.

2. In adevăr, sistemul (1) se mai poate scri:

$$\begin{cases} x+y=a+b+c-z \\ x^2+y^2=a^2+b^2+c^2-z^2. \end{cases}$$

Ridicând la patrat prima ecuaţie şi scăzând a 2-a, obţinem simplificând cu 2:

$$xy=(ab+bc+ca)-(a+b+c)z+z^2.$$

Rezultă că x, y sunt rădăcinele ecuaţiei de gradul al 2-lea:

$$(3)\quad t^2-(a+b+c-z)t+(ab+bc+ca)-(a+b+c)z+z^2=0.$$

Cum x, y, z sunt raţionali, va trebui determinat z, astfel ca realizantul ecuaţiei (3), care este

$$R=(a+b+c-z)^2+4(a+b+c)z-4(ab+bc+ca)-4z^2=$$
$$(a+b+c)^2+2(a+b+c)z-4(ab+bc+ca)-3z^2,$$

să fie un patrat perfect u^2, astfel că deducem:

$$(4)\qquad u^2+3z^2-2(a+b+c)z=(a+b+c)^2-4(ab+bc+ca).$$

Rămâne să soluţionăm în numere raţionale ecuaţia (4) de gradul al 2-lea, cu două necunoscute.

Intăi, facem o substituţie potrivită în (4), ca noua ecuaţie să nu conţie termeni de primul grad, cu noile necunoscute.

Efectuăm în acest scop, în ecuaţie (4), substituţia

$$(5)\qquad u=-\frac{v}{3}, \qquad z=\frac{a+b+c-w}{3},$$

şi avem:

$$\frac{v^2}{9}+\frac{(a+b+c)^2-2(a+b+c)w+w^2}{3}-\frac{2(a+b+c)^2-2(a+b+c)w}{3}=$$
$$(a+b+c)^2-4(ab+bc+ca),$$

sau:

$$(6)\quad v^2+3w^2=12(a+b+c)^2-36(ab+bc+ca).$$

In virtutea identităţii,

$$12(a+b+c)^2 - 36(ab+bc+ca) \equiv$$
$$9(b-a)^2 + 3(a+b-2c)^2,$$

ecuația (6) devine:

(7) $\quad v^2 + 3w^2 = 9(b-a)^2 + 3(a+b-2c)^2.$

Este clar că această ecuație admite soluția rațională, particulară:

(7′) $$\begin{aligned} v &= 3(b-a) = v_1 \\ w &= a+b-2c = w_1. \end{aligned}$$

Rămâne să aflăm soluția generală, rațională, a ecuației (7).

Pentru aceasta observăm că geometric, ecuația (7), [într'un sistem de axe rectangulare (u, v)] reprezintă o elipsă ce trece prin punctul de coordonate (v_1, w_1).

O dreaptă arbitrară ce trece prin acest punct, a cărei ecuație este prin urmare,

(8) $\quad v - v_1 = k(w - w_1)$, ($k$ arbitrar și rațional),

nu mai poate tăia elipsa de cât într'un singur punct și deci coordonatele (u, v) ale acestui punct de intersecție, se exprimă rațional în funcție de k.

(De altfel elipsa este, după cum știm, o curbă unicursală.)

Să rezolvăm acum sistemul:

(9) $$\begin{cases} v^2 + 3w^2 = v_1^2 + 3w_1^2 \\ v - v_1 = k(w - w_1), \end{cases}$$

v_1, w_1 având valorile date în (7′).

Scriind prima ecuație din (9) sub forma

$$v^2 - v_1^2 = -3(w^2 - w_1^2)$$

și împărțind'o cu a 2-a ecuație, obținem:

$$v + v_1 = -\frac{3}{k}(w + w_1).$$

Sistemul (9) este astfel echivalent cu următorul:

(10) $$\begin{cases} v + v_1 = -\dfrac{3}{k}(w + w_1) \\ v - v_1 = k(w - w_1). \end{cases}$$

Rezolvind acest sistem găsim:

(10′) $$\begin{cases} v = \dfrac{(3-k^2)v_1 - 6kw_1}{3+k^2} \\ w = \dfrac{(k^2-3)w_1 - 2kv_1}{3+k^2}. \end{cases}$$

Inlocuind aceste valori în relațiile de substituție (5), avem:

$$\begin{cases} u = \dfrac{(k^2-3)v_1 + 6kw_1}{3(3+k^2)} \\ z = \dfrac{(3+k^2)(a+b+c) - (k^2-3)w_1 + 2kv_1}{3(3+k^2)}. \end{cases}$$

Inlocuind aci pe v_1 și w_1 cu valoriile lor din (7′), găsim:

(11) $$\begin{cases} u = \dfrac{(k^2-3)(b-a) + 2k(a+b-2c)}{3+k^2} \\ z = \dfrac{2(a+b) + (k^2-1)c + 2k(b-a)}{3+k^2} \end{cases}$$

Rămâne a afla pe x și y, care se obțin rezolvind ecuația (3), ținând seamă că realizantul este u^2, astfel că găsim:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a+b+c-z-u}{2} \\ y = \dfrac{a+b+c-z+u}{2}. \end{cases}$$

Substituind aci pe z și u cu valorile lor din (11), simplificând și ordonând în raport cu a, b, c, *avem în definitiv pentru sistemul de ecuații* (1), *următoarea soluție generală, rațională*:

(1′) $$\begin{cases} x = \dfrac{(k^2-1)a - 2(k-1)b + 2(k+1)c}{3+k^2} \\ y = \dfrac{2(k+1)a + (k^2-1)b - 2(k-1)c}{3+k^2} \\ z = \dfrac{2(1-k)a + 2(1+k)b + (k^2-1)c}{3+k^2}. \end{cases}$$

Cazuri particulare. 1°. Pentru $k = \infty$, soluția (1′) devine:

$$x = a, \qquad y = b, \qquad z = c,$$

soluție evidentă de la început.

2°. Pentru $k = 0$, soluția (1′) devine:

$$\begin{cases} x = \dfrac{-a+2b+2c}{3} = \dfrac{2}{3}(a+b+c) - a \\ y = \dfrac{2a-b+2c}{3} = \dfrac{2}{3}(a+b+c) - b \\ z = \dfrac{2a+2b-c}{3} = \dfrac{2}{3}(a+b+c) - b, \end{cases}$$

care este tocmai soluția dată de d-l *A. Moessner* în problema 1619.

Verificare. De altfel oricare ar fi k (în cazul (1'), e rațional) se poate verifica direct că (1'), satiface sistemul (1), ceea ce am controlat.

Observare. Sistemul (1) fiind simetric în raport cu x, y, z se pot obține din (1') prin permutări circulare, alte cinci sisteme de soluții generale, raționale, cuprinse de fapt în (1').

V. ALACI

---

11. — *Soluția generală, rațională a sistemului:*

$$(A)\qquad \begin{cases} x+y+z=a+b+c \\ x^3+y^3+z^3=a^3+b^3+c^3. \end{cases}$$

Iată o metodă foarte simplă, proprie, pentru soluționarea rațională a sistemului (A), obiectul problemei 1619, de care m'am ocupat și în nota precedentă.

Observ întâi, că

$$(1)\qquad x=a,\qquad y=b,\qquad z=c$$

este o soluție particulară a sistemului (A) și prin urmare cercul de intersecție între planul și sfera din (A), trece prin punctul fix, (1).

Dacă prin urmare prin punctul (1) ducem un plan arbitrar,

$$x-a=\lambda(z-c),\qquad (\lambda,\ \text{variabil și rațional}),$$

el nu mai poate tăia cercul (A) de cât într'un punct și prin urmare à priori rezultă că coordonatele acestui punct se vor exprima rațional în funcție de λ.

Coordonatele acestui punct sunt astfel soluțiile, prevăzute raționale[1], ale sistemului:

$$(2)\qquad \begin{cases} (x-a)+(y-b)+(z-c)=0 \\ (x-a)(x+a)+(y-b)(y+b)+(z-c)(z+c)=0 \\ x-a=\lambda(z-c) \end{cases}$$

In virtutea ecuației 3-a, primele două ecuații din (2) devin:

$$(3)\qquad \begin{cases} (y-b)+(z-c)(\lambda+1)=0 \\ (y-b)(y+b)+(z-c)[2a\lambda+\lambda^2(z-c)+z+c)]=0. \end{cases}$$

Inlocuind pe $y-b$ și $y+b$ scoase din prima ecuație din (3), în a 2-a, obținem:

$$-(z-c)(\lambda+1)[2b-(z-c)(\lambda+1)]+$$
$$(z-c)[2a\lambda+\lambda^2(z-c)+z+c]=0.$$

Lăsând la o parte soluția $z=c$, [z-ul punctului fix de pe cercul (1)], rămâne ecuația:

$$-(\lambda+1)[2b-(z-c)(\lambda+1)]+$$
$$2a\lambda+\lambda^2(z-c)+z+c=0.$$

Rezolvind această ecuație obținem:

$$z=\frac{-\lambda a+(\lambda+1)b+\lambda(\lambda+1)c}{\lambda^2+\lambda+1}.$$

Substituind această valoare a lui z în ecuația 3-a din (2) și în prima din (3) obținem cu ușurință valorile corespunzătoare pentru x și y.

Scriind împreună aceste valori pentru x, y, z, *obținem următoarea soluție generală, rațională a sistemului* (A).

$$(A')\qquad \begin{cases} x=\dfrac{(\lambda+1)a+\lambda(\lambda+1)b-\lambda c}{\lambda^2+\lambda+1} \\ y=\dfrac{\lambda(\lambda+1)a-\lambda b+(\lambda+1)c}{\lambda^2+\lambda+1} \\ z=\dfrac{-\lambda a+(\lambda+1)b+\lambda(\lambda+1)c}{\lambda^2+\lambda+1} \end{cases}$$

Natural, că se pot permuta circular x, y, z din (A').

Aplicație. Dacă în sistemul (A) și în soluția sa generală, rațională (A'), luăm,

$$a=1,\qquad b=c=0,$$

obținem sistemul:

$$(A_1)\qquad \begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

cu soluția corespunzătoare, generală și rațională:

$$(A_1')\qquad \begin{cases} x=\dfrac{\lambda+1}{\lambda^2+\lambda+1} \\ y=\dfrac{\lambda(\lambda+1)}{\lambda^2+\lambda+1} \\ z=\dfrac{-\lambda}{\lambda^2+\lambda+1} \end{cases}$$

---

[1]) De altfel, se poate suprima considerația geometrică de mai sus și se poate trece direct de la sistemul (A) la sistemul (2), în care λ e arbitrar, dar rațional.

Acest sistem, având o ecuație de gradul al 2-lea și admițând soluție rațională,

$$x=a,\qquad y=b,\qquad z=c,$$

nu mai poate avea de cât încă o soluție tot rațională, care depinzând de λ, este soluția generală, rațională, a sistemului (A).

Avem astfel soluția generală, rațională a sistemului simplificat (C) din nota d-lui *Ghermănescu.*

Observare. Soluția (A′), numai în aparență diferă de soluție (1′) din nota mea precedentă. In adevăr, k și λ fiind numere arbitrare, substituia.

$$k = 2\lambda + 1, \tag{4}$$

transformă soluția generală, rațională (1′) în (A′), mai precis (x, y, z) din (1′) se transforma în (y, x, z) din (A′), ceea ce este permis, cum am spus mai sus.

V ALACI

---

12. — *Complectare la Nota No. 9.*

Ne propunem acum să găsim soluțiile *raționale* ale sistemului (C). Deducem

$$\alpha - \beta = \pm\sqrt{(1+\gamma)^2 - (2\gamma)^2},$$

iar pentru ca realizantul să fie un patrat rațional va trebui să avem, conform formul i soluțiilor ecuației pitagoriene,

$$1 + \gamma = k(u^2 + v^2), \qquad 2\gamma = \begin{cases} 2kuv \\ k(u^2 - v^2). \end{cases}$$

In prima ipoteză pentru 2γ, deducem eliminând pe γ

$$k = \frac{1}{u^2 - uv + v^2},$$

$$\gamma = \frac{uv}{u^2 - uv + v^2} = \frac{t}{t^2 - t + 1},$$

unde am însemnat $t = \frac{u}{v}$, rațional.

In a doua ipoteză pentru 2γ, deducem pe aceiaș cale

$$k = \frac{2}{u^2 + 3v^2}, \qquad \gamma = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + 3v^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 3}.$$

Soluțiile generale raționale ale sistemului (C) vor fi date deci de grupele de formule

$$(a) \quad \alpha,\ \beta = \frac{(t-1)^2 \pm (t^2-1)}{2(t^2 - t + 1)}, \qquad \gamma = \frac{t}{t^2 - t + 1},$$

$$(b) \quad \alpha,\ \beta = \frac{2(1 \pm t)}{t^2 + 3}, \qquad \gamma = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 3},$$

t fiind un parametru rațional real, arbitrar. Aceste formule se reduc la un singura grup, căci dacă în (a) înlocuim t prin $\frac{t+1}{t-1}$, regăsim (b).

M. GHERMANESCU

Nota Redacției. Complectarea din Nota No. 9, a fost dată de autorul ei direct la tipografie, unde erau deja culese Notele No. 10 și No. 11. Natural autorul Notei No. 9 n'a cunoscut conținutul celor două note.

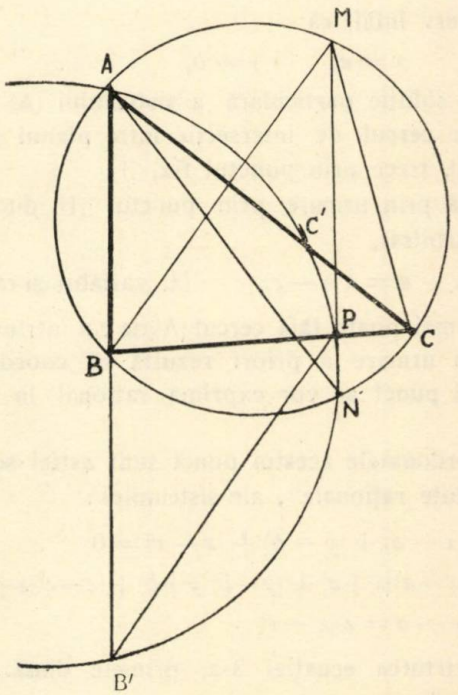
PROBLEME REZOLVATE

1559. — *Pe cercul circumscris triunghiului* A B C *fie* M și N *două puncte*; M N *taie pe* B C *în* P; *paralelele din* P *la* M B, M C *taie laturile* A B, A C *în* B′ *și* C′. *Punctele* A, B′, P, C′, N *sunt pe un cerc.*

N. N. MIHAILEANU

Se observă pe figură că

$$\sphericalangle A B' P = \sphericalangle A B M = \sphericalangle A N P.$$



deci A, A′, N, P sunt conciclice. Și

$$\sphericalangle A N P = \sphericalangle A C M = \text{supl.} \sphericalangle A C' P,$$

deci C′ se află pe același cerc.

Soluți bune date de d-nii: *Apostol Radu. Buznea D. Dinu, Dăscălescu Șt. Hristache* (Focșani), *Rădulescu Gh Octavian* (lic. Mil. Mânăștirea, Dealu) și *Ripianu Andrei.*

1591. — *Știind că x_1 și x_2 sunt rădăcinele ecuației:*

$$a x^2 + b x + c = 0,$$

se cere să se elimine aceste rădăcini din relația:

$$\frac{x_1^2 + \alpha}{x_2^2 + \alpha} = \beta,$$

fără a rezolva ecuația dată.

V. ALACI

Aplicăm relației date o proprietate cunoscută a proporțiilor și avem:

$$\frac{x_1^2 + \alpha + x_2^2 + \alpha}{x_1^2 + \alpha - x_2^2 - \alpha} = \frac{\beta + 1}{\beta - 1},$$

sau:

$$(1) \qquad \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2\alpha}{x_1^2 - x_2^2} = \frac{\beta + 1}{\beta - 1}.$$

Pentru a elimina de aci x_1, x_2, rădăcini a ecuației date, observăm întâi că între aceste rădăcini și coeficienții ecuației date avem relațiile:

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Aceste relații ne permit a scri:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 x_1 x_2 = \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$$

$$(3) \qquad = -\frac{b}{a} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4 x_1 x_2}$$

$$= -\frac{b}{a}\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a}} = -\frac{b\sqrt{b^2 - 4ac}}{a^2}$$

Inlocuind în (1) aceste valori găsite pentru

$$x_1^2 + x_2^2 \quad \text{și} \quad x_1^2 - x_2^2,$$

obținem după simplificare:

$$\frac{b^2 - 2ac + 2a^2\alpha}{b\sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta}.$$

Aceasta este relația ce se obține după eliminarea lui x_1 și x_2 din relația dată.

Soluții date de d-nii: *Aman V. C-tin* (Șc. Polit, Timișoara), *Andrunachievici Al. Vladimir* (student, Iași), *Berinde Titus* (Șc. Polit., Timișoara), *Brădeanu Nicolae* (lic. Beiuș), *Dăscălescu Hristache* (Focșani), *Diaconescu D. Ion* (lic. T-Severin), *Jidanu C-tin* (lic. Beiuș), *Matei D. D-tru* (Iași), *Medeleanu Ion* (bacalaureat), *Milu I. Nicolae* (Șc. Navală, Constanța), *Murgu V. Marțian* (Șc. Polit., Timișoara), *Negrea A Mircea* (Brăila), *Popescu Adrian* (Sub-Lt), *Popoviciu Gabriel*, *Popovici Mircea* (lic. Lugoj), *Rădulescu Gh. Octavian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Reicher L. Herman* (lic. Internat, Iași), *Rosemblatt I. Millu* (lic. Internat, Iași), *Segal Zigu* (lic. Vaslui), *Slavov Iacob* (Bolgrad), *Solomon I Isac* (lic. Internat, Iași), *Stefănescu Marin* (Sub-Lt., Alba-Iulia), *Tilică C. Ștefan* (lic. T-Severin) și *Vlad I. C. Mihai* (Locot., Cluj).

1598. — *Să se rezolve în numere întregi sistemul*

$$\begin{cases} (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 24 \\ (x + y)(y + z)(x + z) = 192 \\ (x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2 = 116 \end{cases}$$

SUB-LT MIRCEA GRUMAZESCU

Adunăm prima ecuație cu a 3-a, simplificăm cu 4 și obținem:

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 35.$$

Scădem prima ecuație din a 3-a, simplificăm cu 4 și găsim:

$$(2) \qquad xy + yz + zx = 23.$$

Observăm acum că identitatea,

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx),$$

în virtutea relațiilor (1) și (2) ne dă:

$$(x + y + z)^2 = 35 + 46 = 81,$$

deci:

$$(9) \qquad x + y + z = \pm 9.$$

Considerăm încă ecuația 2-a a sistemului și înlocuind sumele $x + y$, $y + z$, $z + x$, scoase din (3), avem:

$$(\pm 9 - z)(\pm 9 - x)(\pm 9 - y) = 192,$$

sau:

$$\mp 729 - 81(x + y + z) \pm 9(xy + yz + zx) - xyz = 192.$$

Această relație se mai poate scri, având în vedere relațiile (3) și (2):

$$\mp 729 \pm 729 \pm 207 - xyz = 192.$$

De aci deducem:

$$xyz = 15 \quad \text{și} \quad xyz = -399.$$

In definitiv sistemul dat este echivalent cu următoarele două sisteme:

$$(4)\qquad \begin{cases} x+y+z=9 \\ xy+yz+zx=23 \\ xyz=15 \end{cases}$$

şi:

$$(5)\qquad \begin{cases} x+y+z=-9 \\ xy+yz+zx=23 \\ xyz=-399. \end{cases}$$

In sistemele (4) şi (5) avem cunoscute suma lui x, y, z, suma produselor lor câte două, precum şi produsul lor.

Rezultă de aci că x, y, z din sistemele (4) şi (5) sunt respectiv rădăcinele ecuaţiilor de gradul al 3-lea:

$$(4')\qquad t^3-9t^2+23t-15=0,$$

$$(5')\qquad t^3+9t+23t+399=0.$$

Ecuaţia (4') se descompune astfel:

$$(t-1)(t-3)(t-5)=0.$$

De aci rezultă că x, y, z din sistemul (4), sunt într'o ordine oarecare, 1, 3, 5, numere întregi.

Ecuaţia (5') nu are rădăcini întregi fiindcă divizorii ± 1, ± 3, ± 7, ± 19, a lui 399, nu o verifică.

Sistemele de soluţii în numere întregi, ale sistemului dat, sunt astfel numai:

x	1	3	5	1	3	5
y	3	5	3	5	1	1
z	5	1	1	3	5	3

Soluţii date de d-nii: *Aman V. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Anastasescu M. Mihail* (bacalaureat, Ploeşti), *Anastasiu M. Mihail* (lic. Milit., N. Filipescu), *Andrievici N* (lic. Milit., N. Filipescu), *Andrunachievici Al. Vladimir* (student, Iaşi), *Babeţiu I. Corneliu* (lic. Loga, Timişoara), *Begu I. Ştefan* (Şc. Polit., Bucureşti), *Berinde L. Titus* (Şc. Polit., Timişoara), *Brădeanu Nicolae* (lic. Beiuş), *Buznea D. Dinu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Cetăţeanu Stelian* (lic. Şincai, Bucureşti), *Cioc I. D-tru* (lic. Milit., Craiova), *Dăscălescu Hristache* (Focşani), *Deciulescu Gh.* (Buzău), *Diaconescu Marcel* (lic. Milit., N. Filipescu), *Jidanu I. C-tin* (lic. Beiuş), *Lupescu Corneliu* (Sub-Lt., Roman), *Matei D. D-tru* (bacalaureat, Iaşi), *Medeleanu Ion* (bacalaureat), *Motăş Camil* (lic. Internat, Iaşi), *Pasere S. Emil* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Popescu Adrian* (Sub-Lt), *Popoviciu Gabriel* (student), *Popoviciu Mircea* (lic. Lugoj), *Rădulescu Gh. Octavian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Reicher L. Herman* (lic. Internat, Iaşi), *Rosenblatt S. Millu* (lic. Internat, Iaşi), *Segal Zigu* (lic. Vaslui), *Slavov Iacob* (Bolgrad), *Solomon I. Isac* (lic. Internat, Iaşi), *Staicu I. N.* (lic. Milit., N Filipescu), *Stefănescu F. Marin* (Sub-Lt., Alba-Iulia), *Stoenescu D. Mirel* (lic. Milit., N. Filipescu), *Tilică C. Ştefan* (lic. T.-Severin) şi *Vijelie Gh. Eugen* (lic. Milit., N. Filipescu).

1599. — *Să se calculeze valoarea determinanţilor:*

$$D_4=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix},\qquad D_5=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

GH D. SIMIONESCU

Vom calcula determinanţii mai generali,

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & a & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix},$$

$$D_{2n+1}=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & & & & & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & a \end{vmatrix},$$

folosind soluţia autorului problemei. Considerăm determinantul D_{2n}, scădem din elementele unei coloane i elementele corespunzătoare din coloana $i+2$, $(i=1,2,\dots n-2)$ şi obţinem următorul determinant, în care ultimele două coloane se păstrează:

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -a & 0 & a & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -a & 0 & a & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Adunăm acum elementele primei linii, la elementele corespunzătoare a liniei a 3-a, adunăm

apoi elementele liniei a 3-a astfel formate la elementele liniei a 5-a şi aşa mai departe; totodată adunăm elementele liniei a 2-a la elementele corespunzătoare a liniei a 4-a, adunăm apoi elementele liniei a 4-a astfel formate la elementele liniei a 6-a şi aşa mai departe.

Se obţine în felul acesta următorul determinant,

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & \dots & 2 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n & a \end{vmatrix},$$

în care toate elementele de sub diagonala principala sunt nule, afară de acelea de pe ultimele două coloane.

Dezvoltând acest determinant după elementele primei coloane şi procedând la fel pentru determinanţii ce apar pe rând, ajungem la dezvoltarea:

$$(1) \qquad D_{2n} = a^{2n-2} \begin{vmatrix} a & n \\ n & a \end{vmatrix} = a^{2n-2}(a^2 - n^2).$$

Procedând în acelaşi fel şi pentru determinantul D_{2n+1}, obţinem:

$$(2) \qquad D_{2n+1} = a^{2n-1}[a^2 - n(n+1)].$$

In cazul particular $n = 2$, dezvoltările (1) şi (2) devin respectiv:

$$D_4 = a^2(a^2 - 4), \qquad D_5 = a^3(a^2 - 6).$$

Au calculat direct determinanţii D_4 şi D_5, d-nii: *Aman V. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Anastasescu M. Mihail* (bacalaureat, Ploeşti), *Andrunachievici Al. Vladimir* (student, Iaşi), *Babeţiu T. Corneliu* (lic. Loga, Timişoara), *Berinde L. Titus* (Şc. Polit., Timişoara), *Cetăţeanu Stelian* (lic. Şincai, Bucureşti), *Deciulescu Gh.* (lic. Buzău), *Dăscălescu Şt. Hristache* (Focşani), *Drăgulescu Gh. Gheorghe* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Florescu Victor* (lic Milit., N. Filipescu), *Jidanu I. C-tin* (lic. Beiuş), *Lupescu Corneliu* (Sub-Lt., Roman), *Marcuzon Lupu* (lic. Internat, Iaşi), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Motâş Camil* (lic. Internat Iaşi), *Popoviciu Mircea* (lic. Lugoj), *Petrescu C. Alin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Popescu-Zorica N. Alexandru* (Bucureşti), *Popoviciu Gabriel* (student), *Reicher L. Herman* (lic. Internat, Iaşi), *Ripianu Andrei* (a tratat şi cazul general), *Rosenblatt I. Millu* (lic. Internat, Iaşi), *Roth I. Alexandru* (lic. Arad), *Saegiu V. C-tin* (Cluj), *Şandor Vasile*, *Segal Zigu* (lic. Vaslui), *Selmereanu Horia* (lic. Orăştie), *Slavov Iacob* (Bolgrad), *Solomon I. Isac* (lic. Internat, Iaşi), *Staicu I. N.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Stamate I. Ionel* (lic. Lugoj), *Ştefănescu Costin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Ştefănescu F. Marin* (Sub-Lt., Alba-Iulia), *Stoenescu D. Mirel* (lic. Milit., N. Filipescu), *Tilică C. Ştefan* (lic. T.-Severin) şi *Voicu I. Aurelian* (lic. Milit., Tg-Mureş).

1611. — *Fiind dată ecuaţia* $x^2 + px + q = 0$ *cu rădăcinele* x_1, x_2, *să se formeze ecuaţia de gradul al 2-lea cu rădăcinele:*

$$X_1 = \frac{m}{x_1} + \frac{n}{x_2}, \qquad X_2 = \frac{n}{x_1} + \frac{m}{x_2}.$$

Să se caute relaţia dintre realizanţii lor

Cazuri particulare:

1°. $m = n$.

2° $m = 3$, $n = 2$, $p = 1$, $q = -6$.

N. N. MIHAILEANU

Formăm suma şi produsul rădăcinelor ecuaţiei cerute, avem:

$$(1) \begin{cases} X_1 + X_2 = \dfrac{m+n}{x_1} + \dfrac{m+n}{x_2} = (m+n)\cdot\dfrac{x_1+x_2}{x_1 x_2} \\ X_1 X_2 = \dfrac{mn}{x_1^2} + \dfrac{mn}{x_2^2} + \dfrac{m^2+n^2}{x_1 x_2} = \\ \quad = mn\cdot\dfrac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1^2 x_2^2} + \dfrac{m^2+n^2}{x_1 x_2}. \end{cases}$$

De altă parte, privind ecuaţia dată cu rădăcinele x_1, x_2, putem scri,

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = q, \end{cases}$$

conform relaţiilor cunoscute între rădăcini şi coeficienţi.

In virtutea relaţiilor (2), relaţiile (1) devin:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = -\dfrac{p(m+n)}{q} \\ X_1 X_2 = \dfrac{mn(p^2 - 2q)}{q^2} + \dfrac{m^2+n^2}{q} = \\ \dfrac{mnp^2 + q(m^2+n^2-2mn)}{p^2} = \dfrac{mnp^2 + q^2(m-n)^2}{q^2}. \end{cases}$$

Având acum cunoscut suma şi produsul lui X_1 şi X_2, ecuaţia de gradul al 2-lea cu aceste rădăcini, este:

$$X^2 + \frac{p(m+n)}{q}X + \frac{mnp^2 + q(m-n)^2}{q^2} = 0,$$

sau:

$$(3) \qquad \boxed{q^2X^2 + pq(m+n)X + mnp^2 + q(m-n)^2 = 0}$$

Relația între realizanți. Realizantul ecuației date este:

$$R_1 = p^2 - 4q. \tag{4}$$

Realizantul ecuației (3) este:

$$R_2 = p^2 q^2 (m+n)^2 - 4 m n p^2 q^2 - 4 q^3 (m-n)^2 = q^2 [p^2 (m-n)^2 - 4 q (m-n)^2] = q^2 (m-n)^2 (p^2 - 4q). \tag{5}$$

Din (4) și (5) deducem,

$$R_2 = q^2 (m-n)^2 R_1, \tag{6}$$

care este relația între realizanți.

Cazul particular $m = n$ In acest caz ecuația (3) devine:

$$q^2 X^2 + 2 m p q X + m^2 p^2 = 0,$$

iar relația (6) ne dă,

$$R_3 = 0,$$

deci:

$$X_1 = X_2 = -\frac{m p}{q}.$$

Cazul particular $m = 3$, $n = 2$, $p = 1$, $q = -6$.

In acest caz, ecuația devine:

$$36 X^2 - 30 X = 0,$$

ca rădăcinele:

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = \frac{5}{6},$$

iar din (6) deducem:

$$R_2 = 36 R_1 = 36.25 = 900.$$

Soluții date de d-nii: *Aman V. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Anastasiu M Mihail* (lic. Milit., N. Filipescu), *Andrievici N.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Andrunachievici Vladimir* (student, Iași), *Bârlea G. Victor* (lic. Militar, N. Filipescu), *Berinde L. Titus* (Șc Polit., Timișoara), *Buznea Dinu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Cernat Camil* (lic. Milit., N. Filipescu), *Cetățeanu Stelian* (lic Șincai, București), *Cristescu Dan* (lic. Brașov), *Dăscălescu Șt. Hristache* (Focșani), *Deciulescu Gh.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Diaconescu D. Ion* (lic T-Severin), *Diaconescu Marcel* (lic. Milit., N. Filipescu), *Drăgulescu Gheorghe* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Gligor N. Ioan* (lic. Arad), *Jidanu I. C-tin* (lic Beiuș), *Lepo'szky Carol* (bacalaureat), *Mihăileanu C. Andrei* (lic. Arad), *Modâlca S. Emil* (lic. T-Severin), *Popa D. Mircea* (lic. Milit., Iași), *Popescu-Zorica N. Alexandru* (București), *Popoviciu Gabriel* (student), *Reicher L. Herman* (lic. Internat, Iași), *Roth I. Alexandru* (lic. Arad), *Șandor Vasile*, *Segal Joe* (lic Libros. București), *Segal Zigu* (lic. Vaslui), *Solomon I. Isac* (lic. Internat, Iași), *Staicu I. N.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Stefănescu F. Marin* (Sub-Lt), *Stoenescu D. Mirel* (lic. Milit., N. Filipescu), *Tilică C. Ștefan* (lic. T-Severin), *Theodorescu N. Dorin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Vijelie Gh. Eugen* (lic. Milit., N. Filipescu) și *Vlad I. C. Mihai* (Locot.).

PROBLEME PROPUSE

1697. — Să se arate că expresia,

$$7^{4n} + 101^{2n} + 166,$$

este divizibilă prin 12 oricare ar fi n întreg, pozitiv.

SUB-LT. MARIN P. TICA

1698. — Dacă,

$$x_1 = x_{n+1},$$

atunci:

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k+1})^5 = \text{mult. } 5.$$

S-LT. IOAN C. SAVIN

1699. — Să se determine m astfel ca pentru $x = 1$, limita expresiei,

$$\frac{m x^{m+2} - (m+1) x^{m+1} + x}{x^2 - 2x + 1}$$

să fie egală cu 15. CEZAR IVANESCU

1700. — Să se rezolve ecuația,

$$p^2 r x^3 - p^2 x^2 + (4R + r) x - 1 = 0,$$

p, r, R fiind elemente obicinuite într'un triunghiu oarecare. IOAN S. TRICA

1701. — Pe înălțimea din A triunghiului ABC se iau punctele D și E. Perpendicularele duse din aceste două puncte pe laturile AB și AC formează un paralelogram, având segmentul DE ca diagonală. Să se arate că a doua diagonală a acestui paralelogram este perpendiculară pe mediana triunghiului care plecă din vârful A.

VASILE VASU

1702. — Dacă A, B sunt conjugate armonic față de C, D, avem:

$$\frac{BC - BD}{BC + BD} = \frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB} = \frac{AC + AD}{AC - AD}.$$

N. N. MIHAILEANU

1703. — Notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se stabilească relațiile:

$$\frac{a(r + p - a)^2}{r(p - a)} = \frac{a(r_a + p)^2}{r_a p} = 2(a + 2R).$$

V. ALACI

INFORMAŢIUNI

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL XI-LEA

care a început în Martie 1938.

Costul *special* a unui abonament este de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Pentru anul al XI, care a început în Martie 1938, s'a primit până acum la Redacţia „R. M. T." următorul abonament:

1. *Prof. Sergescu P.*, Universitatea, Cluj.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecţia R. M. T., anul XVIII, în volum şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS:
1 an: Belgique, **30 fr.** France, **25 fr.**
Etranger, 7 **belgas**

Administration
SPHINX, Bruxelles 173, Avenue Longchamp

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XVII, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

Abonamentul pe anul XVIII-lea al revistei, care a început cu numărul 1 la 15 Martie 1938, costă 100 (UNA SUTA LEI) şi se trimite prin contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal pe adresa: Prof. C. TEODORESCU, rectorul Şcoalei Politechnice, Timişoara.

ANUL XVIII. 15 SEPTEMBRIE 1938 No. 7.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. GH. CONSTANTINESCU: SOLUTIUNILE INTREGI ALE ECUATIUNII, $x^z - 16^n y^z = z$.
2. NOTE MATEMATICE: 13, 14.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 1281, 1466, 1625
5. PROBLEME PROPUSE: 1704–1711.
6. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Cu plăcere anunţăm că începând dela 15 Martie 1938, mai face parte dintre membrii *Revistei Matematice din Timişoara,* d-l profesor *Cezar Ivănescu*, un harnic şi valoros fost corespondent al „R. M. T".

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVIII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVIII inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XVIII — No. 7 TIMISOARA, 15 SEPTEMBRIE 1938

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

SOLUȚIUNILE ÎNTREGI ALE ECUAȚIUNII $x^2 - 10^n y^2 = z$.

DE

PROF. GH. CONSTANTINESCU

(urmare)

6. Dăm aci alăturat și soluțiile reduse ale ecuațiunilor $x^2 - 10y^2 = z$ și $2x^2 - 5y^2 = z$, unde z este număr prim și mai mic ca 1000.

Soluțiunile reduse ale ecuațiuni $x^2 - 10y^2 = z$, *pentru* z *prim* < 1000.

z	x	y	z	x	y
1	19	6	449	33	8
31	11	3	479	27	5
41	9	2	521	39	10
71	9	1	569	27	4
79	13	3	599	37	7
89	27	8	601	31	6
151	31	9	631	71	21
191	21	5	641	51	14
199	17	3	719	27	1
239	27	7	751	29	3
241	41	12	761	69	20
271	19	3	769	47	12
281	21	4	809	87	26
311	39	11	859	33	5
359	57	17	881	39	8
401	21	2	911	51	13
409	43	12	919	73	21
431	21	1	929	33	4
439	23	3	991	91	27

Soluțiuni reduse ale ecuațiuni $2x^2 - 5y^2 = z$, *pentru* z *prim* < 1000.

z	x	y	z	x	y
2	1	0	53	7	3
3	2	1	67	6	1
5	5	3	83	8	3
13	3	1	107	16	9
37	9	5	157	9	1
43	12	7	163	12	5
173	17	9	587	46	27
197	11	3	613	27	13
227	26	15	643	18	1
277	21	11	653	23	9
283	12	1	677	19	3
293	13	3	683	38	21
307	24	13	733	33	17
317	19	9	757	21	5
347	14	3	773	47	27
373	33	19	787	36	19
397	39	23	797	31	15
443	28	15	827	56	33
467	16	3	853	27	11
523	18	5	877	21	1
547	24	11	907	24	7
557	29	15	947	26	9
563	22	9	997	51	29

După ce am arătat cum se găsesc soluțiile ecuației $x^2 - 10y^2 = z$, să arătăm cum din aceste soluțiuni găsim soluțiile ecuației $x^2 - 10^{2n+1} y^2 = z$.

Pentru aceasta e destul să găsim numai soluțiile reduse ale acestei ecuațiuni și apoi să găsim toate soluțiile ecuației $u^2 - 10^{2n+1} v^2 = 1$ și în modul arătat mai sus se găsesc toate soluțiile acestei ecuațiuni. Ecuația $u^2 - 10v^2 = 1$ are ca soluțiuni șirul:

1 19 721 27379 4.039.681 39.480.499

0 6 228 8658 328.776 12.484.830,

unde un termen al șirului se formează din suma celor doi precedenți inmulțiți respectiv cu 38 și (-1). Din acest șir, tocmai ultimul are pe y care se termină cu zero și deci ecuația $u^2 - 1000y^2 = 1$ are ca soluție redusă pe

$$u = 39480499, \qquad v = 1248483.$$

Cu această soluție redusă formăm șirurile:

1 39480499 6177891143156001

0 1248483 98581463666034

unde un termen din şir se formează din suma celor doi precedenţi, înmulţită respectiv cu 78.960.998 şi (— 1). Din acest şir tocmai al zecelea termen are pe v terminat cu zero şi aceşti termeni cari sunt soluţiile reduse ale ecuaţiei $u^2 - 10^5 v^2 = 1$ au aproximativ 80 cifre. In acelaş mod se continuă şi se găsesc soluţiile ecuaţiei $u^2 - 10^{2n+1} v^2 = 1$, aceste în mod teoretic căci practic problema nu are interes pentru că soluţiile sunt prea mari.

De altfel soluţia generală în mod teoretic am dat-o în „R. M. T.“, anul XVI, No. 6, când am arătat cum se găsesc soluţiunile ecuaţiei

$$x^2 - a_1^{2p_1+1} a_2^{2p_2+1} \ldots\ldots a^{2p_k+1} y^2 = 1,$$

când se cunoaşte o singură soluţie a ecuaţiei $x^2 - a_1 a_2 \ldots\ldots a_k y^2 = 1$.

Soluţiile reduse ale ecuaţiei $x^2 - 10^{2n+1} y^2 = z$ se găsesc în acelaş mod printre soluţiile ecuaţiei $x^2 - 10 y^2 = z$. Dacă x_1, y_1 este o soluţie redusă a ecuaţiei $x^2 - 10 y^2 = z$, soluţiunile generale vor fi date de formulele:

$$x = u x_1 \pm 10 v y_1, \qquad y = u y_1 \pm v x_1,$$

unde u şi v sunt soluţiuni ale ecuaţiunei $u^2 - 10 v^2 = 1$. Aceste soluţiuni formează un şir recurent, unde un termen din şir se formează din suma celor doi precedenţi inmulţiţi respectiv cu 38 şi (— 1). Formăm acest şir până găsim pe y terminat cu zero şi acesti 2 termeni din şir sunt o soluţie redusă a ecuaţiei $x^2 - 10^3 y^2 = z$. Cu acestă soluţie redusă şi cu soluţiile ecuaţiei $u^2 - 10^3 v^2 = 1$, formăm un alt şir recurent, unde un termen se formează din suma celor doi precedenţi inmulţiţi respectiv cu 78.960.998 şi cu (— 1) şi în acest şir căutăm care valoare a lui y se termină cu zero şi acei termeni vor fi soluţiuni reduse ale ecuaţiei $x^2 - 10^5 y^2 = z$. In acelaş mod continuăm pentru a găsi soluţiile reduse ale ecuaţiei $x^2 - 10^{2n+1} y^2 = z$. Aplicaţie. Să găsim patratele berce. Pentru $n = 0$, trebue ca $z < 10$ şi din numerile prime numai $z = 1$ dă soluţie pentru ecuaţia $x^2 - 10 y^2 = 1$. Şirul soluţiunilor a fost dat mai sus. Pentru numerile neprime, avem soluţiuni numai pentru $z = 6$ şi 9. Din ecuaţiunile $2x^2 - 5y^2 = 2$ şi $2x^2 - 5y^2 = 3$, cari au ca soluţiuni reduse pe:

$$\begin{matrix} x' = 1 \\ y' = 0 \end{matrix} \quad \text{şi} \quad \begin{matrix} x'' = 2 \\ y'' = 1, \end{matrix}$$

prin inmulţirea lor găsim

$$(2x'^2 - 5y'^2)(2x''^2 - 5y''^2) =$$

$$(2x'x'' \pm 5y'y'')^2 - 10(x'y'' \pm y'x'')^2 = 6$$

si deci ecuaţia $x^2 - 10y^2 = 6$ are ca soluţie redusă pe

$$x_1 = 4, \qquad y_1 = 1$$

şi soluţiile generale ale acestei ecuaţiuni sunt următoarele două şiruri recurente:

$$\begin{cases} x = 4 & 106 & 4024 \\ y = 1 & 43 & 1633 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 16 & 1744 & 66166 \\ y = 5 & 191 & 7253, \end{cases}$$

unde un termen se formează din suma celor doi precedenţi înmulţiţi respectiv cu 38 şi (— 1). Din ridicarea la patrat a ecuaţiei $2x^2 - 5y^2 = 3$, care are ca soluţiune redusă pe

$$x = 2, \qquad y = 1,$$

găsim că ecuaţia $x^2 - 10y^2 = 9$ are două soluţiuni reduse

$$\begin{matrix} x' = 3 \\ y_1 = 0 \end{matrix} \quad \text{şi} \quad \begin{matrix} x_1' = 7 \\ y_1' = 2, \end{matrix}$$

cari dau naştere la 3 şiruri de soluţiuni:

$$\begin{cases} x = 3 & 57 & 2163 & 82137 \\ y = 0 & 18 & 684 & 25974. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 & 253 & 9607 \\ y = 2 & 80 & 3038 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 13 & 487 & 18493 \\ y = 6 & 154 & 5846, \end{cases}$$

unde un termen din şir se formează din suma celor doi precedenţi inmulţiţi respectiv cu 38 şi (— 1). Numărul 4 deşi nu se poate reprezenta prin ecuaţia $x^2 - 10y^2 = z$, dar pentru că este un patrat perfect dă şi el un şir de soluţiuni, cari sunt soluţiile găsite la ecuaţia $x^2 - 10y^2 = 1$ şi inmulţite cu 2. Pentru $n = 1$ trebue să avem $z < 1000$ şi din numerile prime, numai cele de forma $40m + 1$ şi $40m + 9$ dau soluţiuni pentru această ecuaţiune, iar numerile din progresiile $40m - 1$ şi $40m - 9$ dau soluţiuni numai pentru un produs de un număr par din ele, dar cum căutăm soluţiile pentru $z < 1000$ nu putem avea soluţiuni dela aceste nu

mere. Să luăm exemplu: $x^2 - 1000y^2 = 41$. Ecuaţia $x^2 - 10y^2 = 41$ are ca soluţiune redusă pe

$$x = 9, \qquad y = 2$$

şi deci şi următoarele două şiruri

$$\begin{cases} x & 1929 & 152315345571 \\ y & 61 & 4816634146 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & 13268. \\ z & 419571 \end{cases}$$

In acelaş mod se procedează pentru toate numerile prime şi se găsesc următoarele soluţiuni reduse date de tabloul alăturat:

z	x	y	z	x	y
41	1929	61	89	33	1
241	56921	1800	409	97	3
281	159	5	449	1107	35
401	19701	633	569	28587	904
521	39	1	769	1613	51
601	949	30	809	3447	109
761	69	2	929	14673	464
881	29943	1466.			

Pentru z neprim, se procedează în acelaş mod şi se găsesc câte două soluţiuni reduse pentru următoarele valori ale lui z.

$$z = 3.43 = 129, \quad \begin{cases} x = 13 \text{ şi } 17 \\ y = 2 \text{ şi } 4, \end{cases}$$

$$z = 3\,83 = 249, \quad \begin{cases} x = 17 \text{ şi } 47 \\ y = 2 \text{ şi } 14, \end{cases}$$

$$z = 3.163 = 489, \quad \begin{cases} x = 23 \ldots 73 \\ y = 2 \ldots 22, \end{cases}$$

$$z = 3.283 = 849, \quad \begin{cases} x = 43 \ldots 53 \\ y = 10 \ldots 14, \end{cases}$$

$$z = 3.67 = 201, \quad \begin{cases} x = 601 \ldots 39149 \\ y = 19 \ldots 1238, \end{cases}$$

$$z = 3.107 = 321, \quad \begin{cases} x = 9139 \ldots 511 \\ y = 289 \ldots 130, \end{cases}$$

$$z = 681, \quad \begin{cases} x = 791 \ldots 41 \\ y = 25 \ldots 1, \end{cases}$$

$$z = 3.307 = 921, \quad \begin{cases} x = 26911 \ldots 161 \\ y = 870 \ldots 5, \end{cases}$$

$$z = 13.37 = 481, \quad \begin{cases} x = 191 \ldots 2751 \\ y = 6 \ldots 87, \end{cases}$$

$$z = 13.53 = 689, \quad \begin{cases} x = 633 \ldots 4617 \\ y = 20 \ldots 146. \end{cases}$$

Cu aceste soluţiuni reduse şi cu soluţiile ecuaţiei $u^2 - 1000v^2 = 1$, găsim pentru fiecare din valorile lui z, câte 4 şiruri recurente, cari sunt soluţiuni ale ecuaţiei $x^2 - 1000y^2 = z$.

Pentru $n = 2$, procedăm tot aşa, dar pentru că numerile sunt prea mari, dăm numai câte-va exemple.

Următoarele 6 ecuaţiuni au câte o soluţie redusă:

1. $x^2 - 10^5 y^2 = 601$, $x = 949$, $y = 3$,
2. $x^2 - 10^5 y^2 = 241$, $x = 5.6921$, $y = 180$,
3. $x^2 - 10^5 y^2 = 849$, $x = 43$, $y = 1$,
4. $x^2 - 10^5 y^2 = 321$, $x = 511$, $y = 13$,
5. $x^2 - 10^5 y^2 = 921$, $x = 26911$, $y = 87$,
6. $x^2 - 10^5 y^2 = 689$, $x = 632$, $y = 2$,

NOTE MATEMATICE

13. — *Problème d'analyse indéterminée.*

Déterminer les nombres entiers x, y, x', y', *tels que* $x^2 + ay^2 + (x + ay)^2 = x'^2 + ay'^2 + (x' + ay)^2$, *en faisant* a *successivement égal à 1, 2, 3.*

$a = 1$.

Le problème proposé conduit à l'équation

$$x^2 + xy + y^2 = x'^2 + x'y' + y'^2,$$

qui est satisfaite pour

$$\begin{cases} x = mp - nq \\ y = np + mq + nq \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = mq - np \\ y' = nq + mp + np \end{cases}$$

Exemple. $m = 4$, $n = 3$, $p = 2$, $q = 1$.

$$5^2 + 13^2 + (5 + 13)^2 = (-2)^2 + 17^2 + (-2 + 17)^2$$

$$25 + 169 + 324 = 4 + 289 + 225$$

$$518 = 518.$$

$a = 2$.

L'équation à résoudre est:

$$x^2 + 2y^2 + (x + 2y)^2 = x'^2 + 2y'^2 + (x + 2y')^2,$$

ou

$$x^2 + 3y^2 + 2xy = x'^2 + 3y'^2 + 2x'y',$$

ou

$$(x+y)^2+2y^2=(x'+y')^2+2y'^2.$$

Posons

$$x+y=X, \qquad x'+y'=X',$$

il vient

$$X^2+2y^2=X'^2+2y'^2,$$

qui a pour solution générale

$$\begin{cases} X=p^2-2mn \\ y=p(m+n) \end{cases} \qquad \begin{cases} X'=p^2+2mn \\ y'=p(m-n). \end{cases}$$

Donc

$$x=p^2-2mn-p(m+n);$$
$$x'=p^2+2mn-p(m-n),$$

Cette solution renferme 3 paramètres arbitraires m, n, p.

Exemple. $m=4$, $n=2$, $p=1$.

$$21^2+2.6^2+(21-2.6)^2=15^2+2.2^2+(15+2.2)^2,$$
$$441+72+81=225+8+361$$
$$594=594.$$

$a=3$.

L'équation proposée se transforme en la suivante :

$$x^2+6y^2+3xy=x'^2+6y'^2+3x'y',$$

ou

$$4x^2+24y^2+12xy=4x'^2+24y'^2+12x'y',$$
$$(2x+3y)^2+15y^2=(2x'+3y')^2+15y'^2.$$

Posons

$$2x+3y=X, \qquad 2x'+3y'=X';$$

il faut résoudre

$$X^2+15y^2=X'^2+15y'^2,$$

ou

$$X^2+(4y)^2+y'^2=X'^2+(4y')^2+y^2.$$

Une solution générale de

$$X^2+Y^2+Z^2=X'^2+Y'^2+Z'^2$$

est donné par les formules :

$$\begin{cases} X=r^2-pm-qn \\ Y=r(p+m) \\ Z=r(q+n) \end{cases} \qquad \begin{cases} X'=r^2+pm+qn \\ Y'=r(p-m) \\ Z'=r(q-n). \end{cases}$$

Nous avons les conditions supplémentaires

$$Y=4Z' \quad \text{et} \quad Y'=4Z.$$

α. En prennent pour Y, Z, Y', Z' les valeurs ci-dessus, ces deux conditions donnent les relations :

$$r(p+m)=4r(q-n)$$
$$r(p-m)=4r(q+n),$$

d'où : $p=4q$, $m=-4n$

Nous obtenons

$$\begin{cases} X=r^2+15nq \\ y=r(q-n) \end{cases} \qquad \begin{cases} X'=r^2-15nq \\ y'=r(q+n) \end{cases}$$

$$x=\frac{r^2+15nq-3qr+3nr}{2},$$

$$x'=\frac{r^2-15nq-3qr-3nr}{2}.$$

Nous prendrons pour solution générale les valeurs données par les formules ci-après :

$$\begin{cases} x=r^2+15nq-3qr+3nr \\ y=2r(q-n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'=r^2-15nq-3qr-3nr \\ y'=2r(q+n). \end{cases}$$

Exemple numérique. $r=7$, $n=2$, $q=1$.

$$50^2+3.(-7)^2+(50-3.7)^2=$$
$$(-22)^2+3.21^2+(-22+3.21)^2,$$
$$2500+147+841=484+1323+1681$$
$$3488=3488.$$

β. Puisqu'on peut permuter entre elles les lettres X, Y, Z, respectivement X', Y', Z', permutons par exemple Y' et Z'. Les conditions supplémentaires fournissent dans ce cas les relations :

$$r(p+m)=4r(p-m),$$
$$r(q-n)=4r(q+n),$$

d'où :

$$p=\frac{5m}{3}, \qquad q=-\frac{5n}{3}.$$

Nous trouvons alors

$$\begin{cases} X=\dfrac{3r^2-5m^2+5n^2}{3} \\ y=\dfrac{2rm}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X' = \dfrac{3r^2 + 5m^2 - 5n^2}{3} \\ y' = -\dfrac{2rn}{3}. \end{cases}$$

Nous considérerons la solution exprimée par les formules suivantes obtenues en laissant le dénominateur commun de côté :

$$\begin{cases} x = 3r^2 - 5m^2 + 5n^2 - 6rm \\ y = 4rm \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 3r^2 + 5m^2 - 5n^2 + 6rn \\ y' = -4rn. \end{cases}$$

Exemple numérique. $m=2$, $n=1$, $r=4$.

$$(-15)^2 + 3.32^2 + (-15 + 3.32)^2 =$$
$$87^2 + 3.(-16)^2 + (87 - 3.16)^2,$$

Vérification :

$$225 + 3072 + 6561 =$$
$$7569 + 768 + 1521 \ (= 9858).$$

A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

---

14. — *Asupra ecuațiilor algebrice cu rădăcini reale.*

In rândurile ce urmează vom expune câteva aplicații ale unei funcțiuni introdusă în matematicile superioare de d-nii *F.* și *R. Nevanlinna.*[1]

$\varphi(t)$ fiind o funcțiune reală de variabila reală t, se notează

$$\overset{+}{\varphi}(t) = \frac{1}{2}[\varphi(t) + |\varphi(t)|].$$

Se vede ușor că funcțiunea $\overset{+}{\varphi}(t)$ are două valori :

$$\overset{+}{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{când } \varphi(t) > 0 \\ 0, & \text{când } \varphi(t) \leqq 0. \end{cases}$$

1. Funcțiunea domnilor *F.* și *R. Nevanlinna* are o primă aplicație elementară în aceea că ea ne permite să regăsim, în cazul unei ecuații de gradul al doilea, cu rădăcini reale, formulele cari ne dau rădăcinile în funcție de coeficienții ecuației.

Fie ecuația de gradul al doilea

$$(1) \qquad a x^2 + b x + c = 0 \qquad (a > 0).$$

[1]) *Ueber die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie (Acta Socletatio Scientiarum Fenicae*, t. L, 1922, p. 1—46.)

Rădăcinile fiind presupuse reale și diferite, ele pot fi : amândouă pozitive, amândouă negative sau una negativă și alta pozitivă.

a. Să considerăm întâi cazul când rădăcinile sunt de semne contrare. Fie x_1 rădăcina negativă și x_2 rădăcina pozitivă.

Să considerăm cantitățile

$$y_1 = \overset{+}{x_1} = \frac{x_1 + |x_1|}{2} \quad \text{și} \quad y_2 = \overset{+}{x_2} = \frac{x_2 + |x_2|}{2}.$$

Trebue să observăm că x_1 fiind negativă, $\overset{+}{x_1} = 0$, iar x_2 fiind pozitivă $\overset{+}{x} = x_2$. Deci : $y_1 = 0$ și $y_2 = x_2$. Se are

$$y_1 + y_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{|x_1| + |x_2|}{2}.$$

Ori

$$|x_1| = -x_1, \text{ deoarece } x_1 < 0,$$
$$|x_2| = x_2, \quad \text{deoarece } x_2 > 0,$$

Urmează

$$(2) \qquad y_1 + y_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{-x_1 + x_2}{2} = x_2.$$ [2])

Dar

$$(x_2 - x_1)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$

și cum

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

rezultă

$$(2') \qquad x_2 - x_1 = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a}}.$$ [3])

Introducând în (2) avem

$$(2'') \qquad y_1 + y_2 = y_2 = x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

[2]) De fapt relația (2) se putea scrie direct, fără utilizarea funcțiunii $\overset{+}{\varphi}(t)$. Ea este valabilă și în cazul rădăcinilor imaginare.

[3]) Privind rezultatele (2') și (2'') și ținând seama că petru x_1 se obține valoarea $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, se observă ușor că nu putem lua în fața radicalului decât semnul +. Altfel, sau x_2 n'ar mai fi pozitivă, contrar ipotezei, sau ambele rădăcini ar fi negative.

Rădăcina negativă x_1 se află sau împărțind trinomul $a x^2 + b x + c$ prin $x - x_2$ și egalând câtul cu zero, sau aplicând metoda de mai sus ecuației transformată în $-x$, adică

$$a x^2 - b x + c = 0.$$

b. In cazul când rădăcinile sunt de același semn, de pildă ambele pozitive, ele fiind diferite, există un număr $A > 0$, așa fel încât, x_1 fiind cea mai mică dintre rădăcini, să îndeplinească condițiile

$$x_1 < A < x_2.$$

Punând

$$z = x - A$$

ecuația ce se obține prin transformarea

$$x = z + A$$

va avea o rădăcină pozitivă și una negativă, putându-i-se deci aplica procedeul de mai sus. Ecuația în z este

$$a(z + A)^2 + b(z + A) + c = 0,$$

adică

$$a z^2 + (b + 2 a A) z + a A^2 + b A + c = 0.$$

Rădăcina pozitiva z_2 a acestei ecuații va fi deci

$$z_2 = \frac{-b - 2 a A + \sqrt{(b+2 A)^2 - 4 a (a A^2 + b A + c)}}{2 a},$$

adică

$$z_2 = \frac{-b - 2 A + \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a}.$$

Ținând seama de transformarea (3) vom avea

$$x_2 = z_2 + A = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 a c} - 2 a A}{2 a} + A =$$

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a}.$$

c. Cazul când ambele rădăcini sunt negative se reduce la rezolvarea ecuației transformată în $-x$, ale cărei rădăcini vor fi ambele pozitive.

Demonstrațiile de mai sus nu au alt merit decât de a fi pus în evidență o aplicație elementară a funcțiuni $\overset{+}{\varphi}(t)$.

2. Metoda de rezolvare a ecuațiilor algebrice cu rădăcini reale expusă aci pentru ecuația de gradul al doilea, evident că nu poate fi extinsă. Intr'adevăr, fiind dată ecuația de gradul n

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

presupusă cu rădăcini reale, dintre cari numai una pozitivă, x_n, punând

$$y_i = \overset{+}{x_i} = \frac{x_i + |x_i|}{2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

se are

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = x_n = x_n = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

$$+ \frac{1}{2}(-x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1} + x_n).$$

Ori suma

$$|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = -x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1} + x_n$$

nu poate fi în general calculată în funcție de coeficienții $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ai ecuației date.

3. Să considerăm ecuația de gradul al treilea

$$a x^3 + b x^2 + c x + d = 0, \qquad (a > 0) \tag{4}$$

despre care presupunem că are toate rădăcinile pozitive, două mai mici ca 1 și una mai mare ca 1. Dacă nu, prin transformările indicate mai sus, putem obține o ecuație care să aibă toate rădăcinile pozitive, una singură fiind mai mică decât unitatea.

Transformarea $x = \frac{1}{x}$ ne readuce apoi la cazul nostru.

Să considerăm funcțiunea

$$\overset{+}{\log}\varphi(t) = \frac{1}{2}[\log\varphi(t) + |\log\varphi(t)|]$$

$$\begin{cases} \log\varphi(t), & \text{când } \varphi(t) > 1 \\ 0, & \text{când } \varphi(t) \leqq 1 \end{cases}$$

și cantitățile

$$y_i = \overset{+}{\log} x_i = \frac{1}{2}(\log x_i + |\log x_i|) \quad (i = 1, 2, 3).$$

Se are: $y_1 = y_2 = 0$ și $y_3 = \log x_3$. Pe de altă parte

$$y_1 + y_2 + y_3 = \frac{\log x_1 + \log x_2 + \log x_3}{2} +$$

$$\frac{|\log x_1| + |\log x_2| + |\log x_3|}{2}$$

$$> \frac{\log x_1 + \log x_2 + \log x_3}{2} +$$

$$\frac{|\log x_1 + \log x_2 + \log x_3|}{2}$$

$$= \frac{\log x_1 x_2 x_3}{2} + \frac{|\log x_1 x_2 x_3|}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log\left(-\frac{d}{a}\right) + \left|\log\left(-\frac{d}{a}\right)\right|\right]$$

$$= \log\left(-\frac{d}{a}\right),$$

trebuind să presupunem $d<0$ şi $|d|>|a|$, deoarece $x_3>1$.

Rezultă

$$\log x_3 > \log\left(-\frac{d}{a}\right),$$

deci

$$x_3 > -\frac{d}{a}.$$

Concluzia este generală: Fiind dată ecuaţia algebrică cu rădăcini reale

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad (a_0 > 0)$$

ale cărei rădăcini sunt toate pozitive şi sub unitare, afară de una $x_n>1$, dacă $a_n<0$ şi $|a_n|>a_0$, atunci avem o margine inferioară pentru rădăcina supra unitară, anume

$$x_n > \frac{|a_n|}{a_0}.$$

Sau, cu alte cuvinte, în intervalul $\left(1, \frac{|a_n|}{a_0}\right)$, ecuaţia dată nu are nici o rădăcină".

4. Din cele spuse mai sus se poate deduce imediat următoarea propoziţie:

„Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile reale ale ecuaţiei

(5) $$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

şi

(5′) $$b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n = 0,$$

ecuaţia care admite ca rădăcini pe:

$$|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|.$$

Dacă ecuaţia (5) admite o singură rădăcină pozitivă x_n, valoarea ei este

$$x_n = \overset{+}{x_1} + \overset{+}{x_2} + \cdots + \overset{+}{x_n} = -\frac{a_1}{2a_0} - \frac{b_1}{2b_0}.$$

Invers, dacă ecuaţia (1) admite o rădăcină *pozitivă* egală cu

$$x_n = -\frac{a_1}{2a_0} - \frac{b_1}{2b_0},$$

atunci toate celelalte rădăcini sunt negative sau nule".

N O. ZAHARIA

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLIII, No. 11, Iulie 1938. O vizită a profesorului *Paul Montel* şi o săptămână matematică la *Cluj*, de *G. Călugăreanu*. Aritmetica lui *Gheorghe Asachi* (urmare), de *P. V. Cazanacli*. O soluţie geometrică, problemei 4709, de *Gh. I. Popescu*, Formula mediei pentru polinoame, de *Gh. Mihoc*. Note Probleme rezolvate şi propuse.

2. *Idem*, No. 12, August 1938. † *Regina Maria* Aritmetica lui *Gheorghe Asachi* (urmare şi sfârşit), de *Petre V. Cazanacli*. Relaţiuni într'un patrulater, de *Ad. Gheorghiu*. Formula mediei pentru polinoame (urmare), de *Gh. Mihoc*. Regulamentul premiului „Inginer *H. Capriel*". Note, Probleme rezolvate şi propuse.

3 *Boletin Matematico*, anul XI, No. 5, Mai 1938, *Buenos Aires*. Minime: proprietăţile sale, de *M. O. Gonzalez* Scurte consideraţii asupra înfăsurătorilor, de *T Vescan* Actualităţi: programele noastre de matematici, de *B. I. Baidaff*.

4. *Idem*. No 6, Mai 1938. Proprietăţi caracteristice ale numerilor, de *A. Moessner*. Asupra unei proprietăţi a punctului lui *Miquel*, de *V. Claudian*. Observaţiuni asupra problemei 4379, de *J. Iza*.

5. *Idem*. No. 7. Iunie 1938. Expresiuni aproximative pentru funcţiunile trigonometrice, de *S Sispanov*. O demonstraţie a inegalităţii generalizată a lui *Cauchy-Schwarz* şi oarecare alte inegalităţi, de *B. I. Baidaff*. O demonstraţie a inegalităţei lui *Cauchy*, de *B. I. Baidaff*. Actualităţi: programele noastre de matematică, de *B. I. Baidaff*.

6. *Idem*, No. 8, Iunie 1938. Asupra notei 5, p. 46, de *G. Vivanti*. Observare asupra Notei 17, din „Bol. Mat" an. IX, No 9, de *A. Moessner*. Teorema lui *Stewart* ca consecinţă a unei relaţiuni metrice mai generale, de *B. I. Baidaff*.

7. *Idem*, No. 9, Iulie 1938. † *José S Corti* de *B. I. Baidaff*. Un document pentru istoria matematecilor în Argentina. Calculul unei integrale multiple, de *S Sispanov*. O definiţie raţională a derivatelor parţiale, de *J. Tschlek*. Actualităţi: programele noastre de matematică, de *B. I. Baidaff*.

8. *Idem*, No 10, Iulie 1938. Extensiunea unei formule a profesorului *Gloden*, de *P. Cattaneo*. O soluţie a ecuaţiei diferenţiale, din „B. M.", XI, p. 8, de *A. P. de Toledo Piza*.

9. *Revistă de Ciencias*, anul XL, Martie 1938, *Lima*. Fundamentul metric al Geometriei hiperbolice, de *Leonard M. Blumenthal*. Asupra posibilităţii determinării „coniugiumului" în corpurile numerilor hipercomplexe cu două unităţi, de *St. Galab*. Asupra înfăsurătorilor unei familii de curbe plane depinzând de un parametru şi asupra so-

luțiunilor singulare ale ecuațiilor diferențiale de primul ordin, de *Cristóbal de Losada y Puga*. Câteva teoreme asupra probabilității unui eveniment viitor, calculat după experiență, de *A. Komischke*. Asupra ecuațiilor de mecanică relativistă restrânsă, de *Godofredo Garcia*.

10. *Buletin, Revista Cercului de studii și a Asociației absolvenților Școalei superioare P. T. T.*, an. VII, No. 6—7, Iunie-Iulie 1938 (litografiat). Conține articole de specialitate.

11. *Pitagoru, Revistă de Matematici*, an. III, No. 8—9, Mai-Iunie 1938, Craiova. Exercițiu de calcul integral, de *N. M.* Asupra reciprocei unei teoreme a d-lui prof. *Pompeiu*, de *P. Boldescu*. Note matematice, Probleme rezolvate și propuse.

12. *Culegere de Problemc de Trigonometrie, Partea II*, Trigonometrie plană, de *V. Cristescu*, revăzută și adăugită de *Gh. Th. Gheorghiu*.

Anunțăm cu plăcere apariția acestui volum, foarte interesant prin numeroasele aplicațiuni bine gradate și cu pricepere alese.

Acest volum, împreună cu Partea I (Gonionometria), care a fost cu dreptate premiat de *Academia Română*, nu trebuie să lipsească nici unuia dintre corespondenții noștrii și nici unuia dintre acei ce se ocupă cu studiul matematicilor și tuturor le-o recomandăm cu deosebită stăruință. D-l *Gh. Th. Gheorghiu*, Dr în Matematici, merită toată stima și recunostința matematicienilor români, pentru munca sa desinteresată, prețuită și de real folos celor ce vor cerceta aceste volume.

13. *N. O. Zaharia*. Matematicile în filosofia lui *Auguste Compte*. Lucrarea a obținut premiul de filosofie matematică „Vasile Conta" al Soc. „Gazeta Matematică, în 1934-35.

Acest volum merită toată atenția, pentru conținutul său substanțial, autorul fiind un pasionat cercetător al acestui domeniu al Filosofie Matematice.

14. *David Eugen Smith and Jekuthial Ginsburg. Numbers and Numerals*. Este un interesant volum despre Istoria numerilor din cele mai străvechi timpuri.

15. *T. Vescan. Mecanica și teoria relativității*. Cuprinde o minunată sinteză a teoriei Relativității, însoțită de o bogată bibliografie.

16. *T. Vescan*. The Cosmogonical problem of the annihilation of the sun's mass, and the evolution of the planetary orbits. (Bulletin Scientifique de L'École Polytechnique de Timișoara, t. 8, f. 1—2.)

17. *T. Vescan*. Curriculum Vitae.

PROBLEME REZOLVATE

1281 — *Dintr'un punct* D *al ipotenuzei* BC *a unui triunghiu dreptunghic* ABC *se duc paralele* DE *și* DF *la cele două catete* AB *și* AC *ale triunghiului. Să se arate că:*

1°. *Ori care ar fi punctul* D, *avem relația:*

$$\overline{DB}\cdot\overline{DC}=\overline{AE}\cdot\overline{EC}+\overline{AF}\cdot\overline{FB}$$

2°. *Dintre toate dreptunghiurile* AFDE *care se pot construi astfel, lăsând să varieze* D *pe ipotenuză, cel cu suprafață maximă se obține luând* D *astfel în cât să avem*

$$BD=DC.$$

In acest caz fiecare din produsele de la 1° *este maxim.*

3°. *In cazul* 2° *suprafața dreptunghiului* AFDE *este egală cu suma suprafețelor triunghiurilor* BFD *și* DEC.

4°. *Condiția necesară și suficientă ca două dreptunghiuri* AFDE *și* AF'D'E' *să aibă suprafețe egale este ca dreptele* F'E *și* E'F *să fie paralele.*

Ce devin aceste proprietăți în cazul 2°.

A. HOLLINGER

1°. Din construcția însăși a figurei se vede că

$$(1)\qquad \frac{DB}{AE}=\frac{a}{b}=\frac{DC}{EC}$$

$$(2)\qquad \frac{FB}{DF}=\frac{c}{b}=\frac{ED}{EC}.$$

Din (1) se scoate

$$\overline{DB}\cdot\overline{DC}=\frac{a^2}{b^2}\cdot\overline{AE}\cdot\overline{EC},$$

sau înlocuind pe a^2 prin b^2+c^2.

$$(3)\qquad \overline{DB}\cdot\overline{DC}=\overline{AE}\cdot\overline{EC}+\frac{c^2}{b^2}\cdot\overline{AE}\cdot\overline{EC}.$$

Ținând seamă de (2) și de

$$\overline{ED}=\overline{AF}$$

se găsește

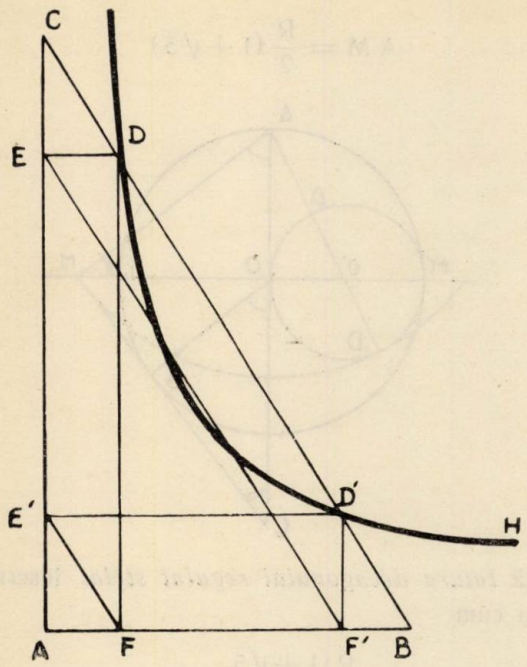
$$\overline{EC}=\frac{b}{c}\overline{ED}=\frac{b}{c}\overline{AF}$$

$$DF=\frac{b}{c}\cdot\overline{FB}$$

sare duse în (3) dau

(4) $\overline{DB}.\overline{DC}=\overline{AE}.\overline{EC}+\overline{AF}.\overline{FB}$

adică tocmai relaţiunea de demonstrat la punctul 1°.



2°. Fie x lungimea $\overline{AF}$. Avem din (2),

$$\overline{DF}=\overline{AE}=\frac{b}{c}\overline{FB}=\frac{b}{c}(c-x).$$

Ţinând seamă de această relaţiune avem

$$S(AFDE)=AE\times AF=\frac{b}{c}x(c-x).$$

Suma factorilor produsului $x(c-x)$ fiind constantă, maximul lui are loc când

$$x=c-x$$

* * * $$x=\frac{c}{2}$$

adică F este mijlocul lui AB deci D este mijlocul lui BC.

Evident că $\overline{AF}\times\overline{FB}$ este maxim odată cu $S(AFDE)$.

Dacă se notează cu y segmentul AE avem

$$\overline{AE}.\overline{EC}=y(b-y)$$

de unde rezultă că maximul acestui produs este când

$$y=\frac{b}{2},$$

adică E mijlocul lui AC, deci D mijlocul lui BC.

La fel

$$\overline{DB}.\overline{DC}=z(a-z)$$

este maxim pentru

$$z=\frac{a}{2}$$

adică pentru D în mijlocul lui BC.

3°. In cazul 2° triunghiurile DEC, DFB sunt egale între ele şi egale cu fiecare din triunghiurile FAE, FDE ca având laturile egale prin construcţie.

4°. Presupun că dreptunghiurile AFDE, AF'D'E' au suprafeţele egale, adică

$$\overline{AE}.\overline{AF}=\overline{AE'}.\overline{AF'}$$

* * * $$\frac{\overline{AE}}{\overline{AF'}}=\frac{\overline{AE'}}{\overline{AF}},$$

care arată că dreptele F'E şi E'F sunt paralele.

Reciproc dacă aceste drepte sunt paralele avem, ultimele două relaţiuni şi deci dreptunghiurile AFDE, AF'D'E' sunt echivalente.

Proprietăţile 4° nu au nimic particular în cazul 2°, doar că EF este paralela şi egală cu jumătate din BC, ceia ce nu alterează cu nimic paralelismul dreptelor F'E, E'F şi echivalenţa dreptunghiurilor AFDE şi AF'D'E'.

Problema care se pune acum pentru a rezolva *complect* problema 1281 este: *Cum se pot găsi punctele* D, D' *astfel ca dreptunghiurile* AFDE, AF'D'E' *să fie echivalente?*

Răspunsul este uşor de dat. Din echivalenţa celor două dreptunghiuri rezultă

$$\overline{AF}\times\overline{FD}=\overline{AF'}\times\overline{F'D'}$$

deci dacă punctul D este dat prin coordonatele

$$\overline{AF}=\alpha,\qquad \overline{FD}=\beta$$

faţă de sistemul de axe AB, AC, atunci coordonatele

$$\overline{AF'}=x,\qquad \overline{F'D'}=y$$

ale punctului D' satisfac ecuaţia

$$x.y=\alpha.\beta=\text{const.}$$

ceia ce arată că punctul D′ descrie o hiperbolă H cu asimptotele AB, AC. Hiperbola H având asimptotele perpendiculare este echilateră, ea trecând prin D, nu mai taie pe BC de cât într'un singur punct.

Rezultă că pentru a construi dreptunghiurile în condiţia 4⁰ se ia un punct oarecare D pe BC şi se caută a doua intersecţie a lui BC cu hiperperbola de ecuaţie

$$x\,y = \alpha\,\beta$$

în care α şi β sunt depărtările lui D la AC şi AB.

Notă. 1⁰. Au rezolvat bine problema, fără însă a căuta să construiască dreptunghiurile de la cazul 4⁰ d-nii: *Amărăşteanu F. M., Andrunachievici Vl., Cazanacli V. P., Loziciu D. I., Murgu M. I., Negrea A. M. L., Popa N., Popoviciu I. Gavrilă, Predoescu I. M., Săvulescu S.* şi *Vlad I. M.*

2⁰. Problema 1281 este şi un interesant exerciţiu de topologie. Anume este interesant de examinat toate cazurile de figură care se pot prezenta considerând pe D variind pe ipotenuza BC şi pe prelungirile ei.

Vom publica sub formă de notă primul studiu ce vom primi în acest senz.

1466. — *Se dă punctul* A, *fix pe cercul* O *şi punctul* M, *mobil pe diametrul perpendicular pe* AO. *Se cere să se determine* M *aşa în cât perpendiculara în* M *pe* AM *să fie tangentă la* O.

G-L Gh. Buicliu

Presupun problema rezolvată şi fie B şi C punctul de tangenţă cu O şi intersecţia cu AO al perpendicularei în M pe AM.

Unghiurile COB, MAO sunt egale ca alterne interne iar OB, OA sunt egale ca raze, deci triunghiurile dreptunghice CBO, MOA sunt egale, de unde

$$(1) \qquad AM = OC.$$

MO fiind înălţime în triunghiul dreptunghic AMC avem

$$\overline{AM}^2 = AO \times AC = R(R + OC).$$

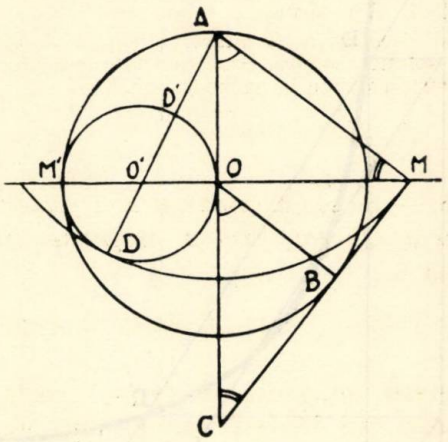
Sau ţinând seamă de (1)

$$\overline{AM}^2 - R \times AM - R^2 = 0$$

$$\overline{AM} = \frac{R}{2}(1 \pm \sqrt{5}).$$

Semnul pozitiv dă

$$(2) \qquad AM = \frac{R}{2}(1 + \sqrt{5})$$



adică *latura decagonului regulat stelat* înscris în O şi cum

$$\frac{R(1+\sqrt{5}}{2} > R$$

se găseşte M la intersecţia cercului de rază $\overline{AM}$ dat de (2) cu diametrul perpendicular pe AO. Avem două puncte M simetrice faţă de O.

Semnul negativ dă

$$(3) \qquad \overline{AM} = -\overline{MA} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

adică *latura decagonului regulat,* care fiind mai mică de cât R nu dă soluţie pentru M.

Construcţia geometrică a lui M este următoarea: pe raza OM′ ca diametru se descrie cercul O′. Fie D, D′ intersecţiile lui AO′ cu O′. Se ştie, şi se demonstrează imediat că

$$AD = \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1) \quad \text{şi} \quad AD' = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Cercul cu centrul în A şi raza AD dă punctele M.

Notă. 1⁰. D-l S-Lt *Vlad I. C. M.* a rezolvat problema pe această cale şi făcând construcţia geometrică.

2⁰. Au calculat pe OM şi au găsit rezultatul exact

$$OM = R\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

d nii: *Begu I. St.* (lic. „Gh. Lazăr", Bucureşti), *Dombrovschi Igor, Poalelungi Gh. V., Popovici C. Al.* (lic. Militar, Cernăuţi), *Florescu L. V., Rădulescu Gh. O.* (lic. Militar, Târgovişte), *Kornis Ernest* (lic. „Diaconovici Loga", Timişoara), *Mişca C. Kivu* (lic. „Unirea", Focşani), *Negrea A. M.* (Brăila), *Pădureţ A. V.* (lic. Militar, Chişinău), *Pasere Em.* (lic. Militar, Tg. Mureş), *Popovici Gavril* (Bacalaureat), *Ripianu Andrei, Tilică C. Şt.* (T. Severin), *Viciu A. A.* (Tg. Mureş).

3°. D-l *Zagaican I.* (Conductor de L. P. Leova) a dat o bună soluţie analitică. Problema este însă prea elementară pentru a merge la geometria analitică.

1625. — *Să se găsească patratul perfect a b c d, în care c, d, b formează o progresie aritmetică cu raţia* 3.

SUB-LT MARIN P. TICA GALL

Progresia aritmetică cu raţia 3 poate să fie crescătoare sau descrescătoare şi atunci rezultă că grupul de trei cifre c, d, b poate fi:

$\div 0.3.6$; $\div 1.4.7$; $\div 2.5.8$; $\div 3.6.9$;

sau

$\div 9.6.3$; $\div 8.5.2$; $\div 7.4.1$; $\div 6.3.0$.

Urmează că numărul $a\,b\,c\,d$ este de forma:

$a603$; $a714$; $a825$; $a936$,

$a396$; $a285$; $a174$; $a063$.

Ţinând seamă de terminaţiile de două cifre ale unui patrat perfect (Culegere de Probleme de Aritmetică, de *I. Ionescu*), n'ar putea fi patrate perfecte dintre numerele de mai sus, de cât următoarele:

(1) $a825$, $a936$, $a396$.

Pe de altă parte numărul $a\,b\,c\,d$ de patru cifre este cuprins între 1000 şi 10000, deci

(2) $$31 < \sqrt{a\,b\,c\,d} \leqq 99.$$

Să examinăm care numere din şirul (1) împlinesc condiţiile (2).

1°. Rădăcina patrată $a825$ este de forma $b5$, deci n'ar putea fi decât: 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95.

Dar:

$35^2 = 1225$, $45^2 = 2025$, $55^2 = 3025$, $65^2 = 4225$,

$75^2 = 5625$, $85^2 = 7225$, $95^2 = 9025$.

Dintre aceste patrate nici unul n'are cifra sutelor 8, deci n'avem nici o soluţie de forma $a825$.

2°. Rădăcina patrată a numerelor $a936$ şi $a396$ este de forma $b4$ sau $b6$, deci n'ar putea fi de cât: 34, 44, 54, 64, 74, 84, 94; 36, 46, 56, 66, 76, 86, 96.

Dar:

$34^2 = 1156$, $44^2 = 1936$, $54^2 = 2916$, $64^2 = 4096$,

$74^2 = 5476$, $84^2 = 7056$, $94^2 = 8836$;

$36^2 = 1296$, $46^2 = 2116$, $56^2 = 3136$, $66^2 = 4356$,

$76^2 = 5776$, $86^2 = 7396$; $96^2 = 9216$.

Este uşor de observat că dintre aceste numere, numai *1936* este de forma $a936$ şi numai *7396* este de forma $a396$.

Avem deci numai următoarele soluţii ale problemei:

$$1936 = 44^2, \qquad 7396 = 86^2.$$

Au găsit ambele soluţii d-nii: *Anastasescu M. Mihail* (Şc. Polit., Bucureşti), şi *Modâlcă S. Emil* (lic. T-Severin).

Au găsit numai soluţia *1936*, d-nii: *Anastasiu M. Mihail* (lic. Milit., N. Filipescu), *Andrievici N.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Bădeanu Nicolae* (lic. Beiuş), *Bârlea S. Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Cernat Camil* (lic. Milit., N. Filipescu), *Cetăţeanu Stelian* (lic. Şincai, Bucureşti), *Dăscălescu Şt. Hristache* (Focşani), *Diaconescu D. Ion* (lic. T-Severin), *Diaconescu Marcel* (lic. Milii., N. Filipescu), *Enache Ioan* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Jidanu I. C-tin* (lic. Beiuş), *Manuilă S. Alexandru* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Milu I. Nicolae* (Şc. Navală, Constanţa), *Moldovanu Cornel* (lic. Tg-Mureş), *Motăş Camil* (lic. Internat, Iaşi), *Popescu Adrian* (Sub-Lt), *Popoviciu Gabriel* (student), *Şandor Vasile, Segal Zigu* (lic Vaslui), *Şelmereanu Horia* (lic. Orăştie), *Slavov Iacob* (Bolgrad), *Solomon I. Isac* (lic. Internat, Iaşi), *Stefănescu F. Marin* (Sub-Lt), *Stoenescu D. Mirel* (lic. Milit., N. Filipescu), şi *Vijelie Gh. Eugen* (lic. Milit., N. Filipescu).

Observare. Câţiva corespondenţi au trimis soluţii fără nici o justificare, din care cauză n'au fost luate în considerare.

PROBLEME PROPUSE

1704. — Să se găsească un patrat perfect de două cifre $z\,u$ astfel că patratul numărului inversat $u\,z$ să fie un număr de forma $z\,x\,u\,x$.

V. THÉBAULT

1705. — Se cere un număr astfel încât scriind după patratul lui plus 1, patratul lui minus 9, să se obţină factorialul lui.

CPT. CD I. LINTES

1706. — La jocul numit *ruletă* sunt 36 de numere câştigătoare, numerotate de la 1 la 36 şi aşezate câte 3 pe aceiaşi linie în felul următor

1	2	3
4	5	6

. . . . . .

Jucătorul, în caz de câştig, poate câştiga de 35, 17, 11, 8, 5 sau de 2 ori miza ce a pontat, după cum a jucat pe un număr, pe 2 numere alăturate (de exemplu pe 2 şi 3 sau pe 2 şi 5), pe 3 numere de pe aceiaşi linie, pe 4 numere alăturate (de exemplu 2, 3, 5 şi 6), pe 6 numere de pe 2 linii consecutive, sau pe 12 numere de pe 3 linii consecutive.

Presupunând că un jucător începe cu miza a după care pune 2 a dacă pierde, apoi 3 a, 4 a, ..., $n\,a$ până câştigă a $n-a$ oară, se cere valoarea lui n în fiecare caz:

1°. Pentru ca jucătorul să câştige maximum.

2°. Pentru ca jucătorul să nu câştige dar nici să nu piardă.

Se va presupune că nu există plafon de mizare, adică se poate juca orice sumă în fiecare caz.

G-L GH. BUICLIU

1707. — Să se determine α astfel că rădăcinele ecuaţiei:

$$x^2y + xy^2 - x - y - \alpha xy + \alpha = 0.$$

să fie egale şi să se calculeze în acest caz rădăcinele.

S-LT MARIN P. TICA

1708. — Să se determine 3 numere întregi x, y, z astfel ca

$$\begin{cases} x + y + z = u^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = v^2 \end{cases}$$

A. GLODEN

1709. — In triunghiul ABC, cercurile ce trec prin A şi sunt tangente în B şi C la BC se taie în I, iar dreptele AI, BI, CI taie laturile triunghiului în A_1, B_1, C_1. Cercul A_1, B_1, C_1 taie a 2-a oară laturile triunghiului ABC, în A_2, B_2, C_2.

Să se arate că:

1°. $\overline{AB} \cdot \overline{CC_1} = \overline{AC} \cdot \overline{BB_1}$.

2°. AA_2, BB_2 CC_2, sunt concurente.

LOCOT. I. GH. ZAMFIRESCU

1710. — Se dă un patrulater oarecare $ABCD$. Prin vârfurile A şi C se duc două drepte paralele cu diagonala DB; iar prin D şi B două paralele oarecare, ce tae pe celelalte două, în punctele E, F, G şi H. Se uneşte F cu H.

1°. Să se arate că aria triunghiului EFH este egală cu aria patrulaterului $ABCD$.

2°. Să se arate că între diagonalele paralelogramului $EFGH$ şi diagonala AC a patrulaterului dat, există relaţia:

$$\overline{AC}^2 \sin^2\theta'' = \overline{HF} \cdot \overline{ES} \sin\theta' \sin\theta,$$

unde: θ este unghiul lui EG cu DB; θ' unghiul dintre HF şi DB; iar θ'' unghiul dintre AC şi DB.

MIHAIL BOTEZ

1711. — Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu oarecare ABC, se cere să se stabilească relaţia

$$(1) \qquad ar + br_1 + cr_2 = (r+p)(r_1+r_2),$$

r_1 şi r_2 fiind razele cercurilor înscrise respectiv în triunghiurile BAD şi CAD, AD fiind înălţimea din A şi presupunând că unghiurile B şi C nu sunt obtuze.

Ce devine relaţia (1) în cazurile:

1°. $A = 90°$. 2°. $B = C$; 3°. C obtuz.

V. ALACI

Erată. Ultimul termen din determinantul problemei 1662, este: $C_1^1 - n$.

Observare. Autorul problemei 1680 este, *L-t C. Ionescu-Ţiu.*

Manuscrise primite de la corespondenții noștrii până la 10 a lunei curente și anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) și probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Aniţescu N. (P); *Bakonyi C.* (1554, 1571, 1591, 1599, 1616, 1625, 1626, 1634, 1649, 1658, 1665, 1673, 1674, 1680, 1681, 1683, 1688); *Cetăţeanu Stelian* (P., 1633, 1634, 1647, 1649, 1653, 1655, 1657, 1663, 1664, 1665, 1673, 1674, 1678, 1681, 1683, 1684, 1688, 1691, 1693, 1696, 1697, 1699, 1703); *Dăscălescu Şt. Hristache* (P., 1357, 1379, 1389, 1435, 1664, 1673, 1674, 1681, 1682, 1683, 1687, 1688, 1690, 1692, 1693, 1696, 1697, 1698, 1699, 1703); *Diaconescu D. Ion* (1536, 1599, 1648, 1649, 1657, 1663, 1665, 1678, 1681, 1683, 1687, 1688); *Georgescu I. Benone* (1664, 1683); *Gligor N. Ioan* (1681, 1683, 1684); *Jidanu I. C-tin* (P., 1225, 1241, 1250, 1439, 1516, 1543, 1581, 1583, 1590, 1597, 1502, 1614, 1617, 1629, 1634, 1638, 1649, 1652, 1656, 1658, 1659, 1664, 1674, 1675, 1678, 1680, 1681, 1682, 1683, 1691, 1692, 1693, 1696, 1697, 1698, 1699, 1700, 1702, 1703); *Lepolszky Carol* (1587, 1609, 1658, 1684); *Lupescu Corneliu* (1614, 1625, 1626, 1647, 1650, 1652, 1659, 1664, 1665, 1673, 1674); *Matei D. D-tru* (P., 1406, 1443); *Modâlca S. Emil* (P., 1489, 1493, 1501, 1583, 1593, 1633, 1639, 1659, 1663, 1667, 1673, 1681, 1682, 1696, 1697, 1698, 1699, 1700, 1701, 1703); *Negrea A. Mircea* (1485. 1640, 1665, 1673, 1682, 1687, 1688, 1697, 1698, 1699, 1700, 1703); *Papadopol D. Elena* (P., 1471, 1473, 1616, 1625, 1666, 1674, 1683); *Popescu Adrian* (1577, 1638, 1640, 1648, 1656, 1657, 1659); *Slavov Iacob* (1565, 1567, 1571, 1572, 1574, 1597, 1664, 1673, 1674, 1681, 1683, 1684); *Ştefănescu F. Marin* (P., 1630, 1674, 1675, 1677, 1678, 1679, 1680, 1681, 1683, 1684, 1687, 1690, 1692, 1694, 1702); *Segal Joe* (1466, 1566, 1597, 1647, 1683, 1687, 1688, 1696, 1701, 1703); *Segal Zigu* (1661, 1681, 1682, 1683, 1684, 1687, 1688, 1690, 1691, 1693, 1694, 1696, 1697, 1698, 1699, 1700, 1701, 1702, 1703); *Tătaru Alexandru* (1678, 1681, 1683); *Topalescu S. Gh.* (1625, 1626).

INFORMAŢIUNI

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL XI-LEA

care a început în Martie 1938.

Costul *special* a unui abonament este de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Pentru anul al XI, care a început în Martie 1938, s'a primit până acum la Redacţia „R. M. T." următorul abonament:

1. *Prof. Sergescu P.*, Universitatea, Cluj.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

A APĂRUT IN BIBLIOTECA GAZETEI MATEMATICE:

CULEGERE DE PROBLEME DE TRIGONOMETRIE

Partea II,

Preţul 125 Lei — TRIGONOMETRIA PLANĂ

Acei care se interesează de identităţile în numere întregi de diferite grade, în special cu problemele *Tarry*, sunt rugaţi a intra în corespondenţă cu mine, *Alfred Moessner* Nürnberg (Germania), Grolandstrasse 79.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XVII, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

ANUL XVIII. 15 OCTOMBRIE 1938 No. 8.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **A. GLODEN:** SUR LA REPRÉSENTATION DE CERTAINS NOMBRES PAR DES SOMMES DE CARRÉS.
2. **MIHAIL BOTEZ:** O CLASA NOUA DE IDENTITATI.
3. NOTE MATEMATICE: 15, 16.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 1569, 1620, 1635, 1650, 1663.
6. PROBLEME PROPUSE: 1712-1719.
7. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu,** Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVIII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVIII inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XVIII — No. 8 TIMISOARA, 15 OCTOMBRIE 1938

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

SUR LA REPRÉSENTATION DE CERTAINS NOMBRES PAR DES SOMMES DE CARRÉS.

Par A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

Théorème. Si un nombre est de n façons distinctes une somme de 3 carrés (tous différents l'un de l'autre), son carré est décomposable de $C_n^2 \cdot A_3^2$ *façons distinctes en une somme de 4 carrés.*

Ce théorème résulte de l'identité

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2) =$$
$$(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2+$$
$$(x_2y_3-x_3y_2)^2+(x_1y_3-x_3y_1)^2$$

et du fait que laissant les x_i en place, on aura d'autres représentations en permutant les y_i.

$$C_n^2 \cdot A_3^2 = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot 3\cdot 2 = 3n(n-1).$$

Exemples:

$n=2$, $C_2^2 \cdot A_3^2 = 6$

$1169 = 1^2+12^2+32^2 = 4^2+8^2+33^2.$

$1169^2 = 1156^2+40^2+140^2+95^2$
$= 656^2+15^2+960^2+120^2$
$= 1112^2+92^2+268^2+223^2$
$= 532^2+63^2+1008^2+252^2$
$= 337^2+392^2+32^2+1048^2$
$= 257^2+338^2+208^2+1052^2 \quad (=1.366.561).$

$n=3$, $C_3^2 \cdot A_3^2 = 18$

$341 = 1^2+12^2+14^2 = 2^2+9^2+16^2 = 4^2+6^2+17^2.$

$341^2 = 334^2+15^2+66^2+12^2$
$= 320^2+8^2+116^2+19^2$
$= 166^2+190^2+80^2+215^2$
$= 152^2+183^2+102^2+222^2$
$= 257^2+106^2+164^2+110^2$
$= 229^2+92^2+200^2+124^2$

$= 314^2+42^2+120^2+39^2$
$= 292^2+31^2+166^2+50^2$
$= 292^2+68^2+148^2+67^2$
$= 266^2+55^2+190^2+80^2$
$= 149^2+200^2+16^2+232^2$
$= 145^2+198^2+36^2+234^2$

$= 334^2+24^2+57^2+30^2$
$= 257^2+2^2+218^2+52^2$
$= 320^2+46^2+89^2+62^2$
$= 229^2+20^2+236^2+88^2$
$= 166^2+145^2+10^2+260^2$
$= 152^2+141^2+60^2+264^2 \quad (=116.281).$

$n=4$, $C_4^2 \cdot A_3^2 = 36$

$614 = 1^2+17^2+18^2 = 2^2+13^2+21^2$
$= 3^2+11^2+22^2 = 6^2+7^2+23^2.$

$614^2 = 601^2+21^2+123^2+15^2$
$= 593^2+13^2+157^2+23^2$
$= 425^2+219^2+321^2+213^2$
$= 406^2+200^2+344^2+232^2$
$= 289^2+355^2+185^2+365^2$
$= 278^2+344^2+200^2+376^2$

$= 586^2+40^2+176^2+32^2$
$= 575^2+29^2+209^2+43^2$
$= 458^2+184^2+320^2+176^2$
$= 439^2+165^2+345^2+195^2$
$= 271^2+371^2+133^2+385^2$
$= 263^2+363^2+147^2+393^2$

$$= 539^2 + 95^2 + 265^2 + 85^2$$
$$= 523^2 + 79^2 + 295^2 + 101^2$$
$$= 523^2 + 113^2 + 283^2 + 103^2$$
$$= 506^2 + 96^2 + 312^2 + 120^2$$
$$= 251^2 + 385^2 + 11^2 + 407^2$$
$$= 250^2 + 384^2 + 24^2 + 408^2$$

$$= 611^2 + 17^2 + 55^2 + 19^2$$
$$= 523^2 + 5^2 + 319^2 + 41^2$$
$$= 523^2 + 137^2 + 223^2 + 187^2$$
$$= 371^2 + 99^2 + 423^2 + 225^2$$
$$= 314^2 + 280^2 + 80^2 + 440^2$$
$$= 250^2 + 264^2 + 192^2 + 456^2$$

$$= 586^2 + 64^2 + 152^2 + 80^2$$
$$= 458^2 + 32^2 + 692^2 + 112^2$$
$$= 575^2 + 79^2 + 173^2 + 101^2$$
$$= 439^2 + 45^2 + 405^2 + 135^2$$
$$= 271^2 + 287^2 + 35^2 + 469^2$$
$$= 263^2 + 285^2 + 69^2 + 471^2$$

$$= 601^2 + 45^2 + 99^2 + 63^2$$
$$= 425^2 + 3^2 + 429^2 + 111^2$$
$$= 593^2 + 59^2 + 121^2 + 85^2$$
$$= 406^2 + 8^2 + 440^2 + 136^2$$
$$= 289^2 + 235^2 + 55^2 + 485^2$$
$$= 278^2 + 232^2 + 88^2 + 488^2 \quad (= 376.996).$$

Le nombre de représentations du carré par une somme de 4 carrés (dont aucun n'est nul) donné par nos formules est évidemment réduit si certains des x_i ou des y_i sont égaux.

Ex. *a.* $\begin{cases} 2^2+2^2+5^2=1^2+4^2+4^2 \quad (=33) \\ 33^2=30^2+6^2+12^2+3^2 \quad (=21^2+18^2+0^2+18^2). \end{cases}$

b. $\begin{cases} 1^2+1^2+5^2=3^2+3^2+3^2 \quad (=27) \\ 27^2=21^2+0^2+12^2+12^2). \end{cases}$

Remarques.

I. En écrivant les solutions paramétriques des équations

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \cdots$$

on obtiendra des solutions paramétriques d'un système d'équations de la forme

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2 =$$
$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 + T_3^2 = \cdots,$$

le nombre d'équations du second système s'exprimant par $C_n^2 \cdot A_3^2$ si celui du premier est n.

II. Le résultat exprimé dans notre théorème peut être étendu dans deux sens:

a. on peut exprimer un théorème analogue relatif au carré d'un nombre représentable de n façons par une somme de m carrés $(m > 3)$;

b. on peut considérer la représentation des puissances supérieures au carré par une somme de $(m+1)$ carrés.

O CLASĂ NOUĂ DE IDENTITĂȚI

DE

MIHAIL BOTEZ

Intr'o serie de articole, apărute în această revistă[1], domnii prof.: *V. Alaci*, *N. Ciorănescu*, *Claudian* ș. a. au arătat metode generale interesante pentru obținerea unei identități.

Imi propun, să indic o nouă clasă de identități, considerând câteva din modalitățile de însumare a unei serii duble. Se înțelege, că în calculele noastre, nu pot intra decât serii duble absolut convergente[2].

I. Să considerăm seria dublă, îndeplinind condiția cerută.

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} u_{00} & u_{01} & u_{02} \cdots & u_{0n} \cdots & \\ \hline u_{10} & u_{11} & u_{12} \cdots & u_{2n} \cdots & \\ \hline u_{20} & u_{21} & u_{22} \cdots & u_{3n} \cdots & \\ \vdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & & \\ \vdots & | & | & & \\ \vdots & | & | & & \\ \cdot & | & | & & \\ u_{m0} & u_{m1} & u_{m2} \cdots & u_{mn} \cdots & \\ | & | & | & & \\ \cdots\cdots\cdots & & & & \end{array}$$

a. Ținând seama că suma seriei duble pe linii, este egală cu suma obținută pe coloane, avem identitatea:

[1] R. M. T. vol. II, III, IV, XI, XII.

[2] *E. Goursat* — Analyse Mathématique (vol. I. pag. 424).

(A)
$$\sum_1^n u_{i0} + \sum_1^n u_{i1} + \sum_1^n u_{i2} + \cdots$$
$$\cdots = \sum_1^u u_{0i} + \sum_1^n u_{1i} + \sum_1^n u_{2i} + \cdots$$

b. Să aplicăm acum, „transformarea *Clausen*", care constă în a aduna linia cu coloana de acelaş rang, excluzând termenii liniei ce fac parte din coloanele precedente, şi termenii coloanii ce fac parte din liniile precedente.

Acestea sunt sumele ce se obţin, ducând paralele la dimensiunile tabloului.

Suma seriei, va avea după acest procedeu, expresia:

$$S = \sum_{\substack{i=0\\j=0}}^{m,n} u_{ij} + \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{m,n} u_{ij} + \cdots + \sum_{\substack{i=p\\j=p}}^{m,n} u_{ij} + \cdots$$

în care:

$$\sum_{\substack{i=p\\j=p}}^{m,n} u_{ij} = u_{pp} + u_{p.p+1} + u_{p.p+2} + \cdots$$

$$\cdots + u_{p.n} + u_{p+1.p} + u_{p+2.p} + \cdots + u_{mp}.$$

De unde rezultă identităţile:

(B)
$$\sum_{\substack{i=0\\j=0}}^{m,n} u_{ij} + \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{m,n} u_{ij} + \cdots + \sum_{\substack{i=p\\j=p}}^{m,n} u_{ij} + \cdots$$
$$\cdots = \sum_1^n u_{0i} + \sum_1^n u_{1i} + \cdots + \sum_1^n u_{pi} + \cdots$$
$$\sum_{\substack{i=0\\j=0}}^{m,n} u_{ij} + \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{m,n} u_{ij} + \cdots + \sum_{\substack{i=p\\j=p}}^{m,n} u_{ij} + \cdots$$
$$\cdots = \sum_1^n u_{i0} + \sum_1^n u_{i1} + \cdots + \sum_1^n u_{ip} + \cdots$$

c. Să considerăm, suma seriei duble, ca egală cu produsul [1] a două serii. Adică să formăm: $\Sigma u_i \, \Sigma v_i$.

In acest caz, seria dublă va fi:

$$\begin{array}{l} u_0v_0 \quad u_0v_1 \quad u_0v_2 \quad u_0v_3 \ldots\ldots \\ u_1v_0 \quad u_0v_1 \quad u_1v_2 \quad u_1v_3 \ldots\ldots \\ u_2v_0 \quad u_2v_1 \quad u_2v_2 \quad u_2v_3 \ldots\ldots \\ u_3v_0 \quad u_3v_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Sumarea acestei serii se face prin linii egal înclinate pe laturile tabloului. De unde rezultă următoarea expresiune, pentru suma seriei:

$$S = U_{00} + \sum_{\substack{i=0\\j=1}}^{i=1} U_{ij} + \sum_{\substack{i=0\\j=2}}^{i=2} U_{ij} + \cdots + \sum_{\substack{i=0\\j=p}}^{i=p} U_{ij} + \cdots$$

în care am notat:

$U_{00} = u_0v_0$; $U_{01} = u_0v_1$; $U_{11} = u_1v_1 \ldots$ etc.

şi unde:

$$\sum_{\substack{i=0\\j=p}}^{i=p} U_{ij} = U_{0p} + U_{1\,p-1} + U_{2.p-2} + \cdots + U_{p.0}.$$

De unde rezultă următorul şir de identităţi:

(C)
$$u_{00} + \sum_{\substack{i=0\\j=1}}^{i=1} u_{ij} + \cdots + \sum_{\substack{i=0\\j=p}}^{i=p} u_{ij} + \cdots$$
$$\cdots = \sum_1^n u_{0i} + \cdots + \sum_1^n u_{pi} + \cdots$$
$$u_{00} + \sum_{\substack{i=0\\j=1}}^{i=1} u_{ij} + \cdots + \sum_{\substack{i=0\\j=p}}^{i=p} u_{ij} + \cdots$$
$$\cdots = \sum_1^n u_{i0} + \cdots + \sum_1^n u_{ip} + \cdots$$
$$u_{00} + \sum_{\substack{i=0\\j=1}}^{i=1} u_{ij} + \cdots + \sum_{\substack{i=0\\j=p}}^{i=p} u_{ij} + \cdots$$
$$\cdots = \sum_{\substack{i=0\\j=0}}^{m,n} u_{ij} + \cdots + \sum_{\substack{i=p\\j=p}}^{m,n} u_{ij} + \cdots$$

[1]) *S. Stoilov* — Curs de Analiză Matem. 1922. (litografiat)

II. Ţinând seama de relaţiile (A), (B) şi (C) obţinute, să calculăm identităţile ce se pot scoate din următoarea serie [1] dublă:

$$\begin{array}{llll} \frac{\alpha}{1!} & \frac{\alpha^2}{2!} & \frac{\alpha^3}{3!} \cdots\cdots & \frac{\alpha^n}{n!} \cdots \\ \alpha^2 & \frac{\alpha^4}{2!} & \frac{\alpha^6}{3!} \cdots\cdots & \frac{\alpha^{2n}}{n!} \cdots \\ \alpha^3 & \frac{\alpha^6}{2!} & \frac{\alpha^9}{3!} \cdots\cdots & \frac{\alpha^{3n}}{n!} \cdots \\ \vdots & \cdots\cdots & & \\ \alpha^m & \frac{\alpha^{2m}}{2!} & \frac{\alpha^{3m}}{3!} \cdots\cdots & \frac{\alpha^{mn}}{n!} \cdots \\ \vdots & \cdots\cdots & & \end{array}$$

Pe care să o sumăm, după metodele indicate mai înainte.

Vom avea o primă identitate rezultată din sumarea prin linii şi prin coloane:

$$(A') \qquad \sum(e^{\alpha^i}-1)=\sum\frac{1}{i!}\frac{\alpha^i}{(1-\alpha)^i}.$$

Să aplicăm acum „transformarea *Clausen*", vom obţine ca expresie a seriei considerate:

$$S_{m.n}=\sum\frac{\alpha^{i^2}}{i!}+\sum\alpha^{(i+1)}\left[1+\frac{1}{(1+i)!}\right]+$$

$$\sum\alpha^{2(2+i)}\left[\frac{1}{2!}+\frac{1}{(2+i)!}\right]+\cdots$$

De unde identităţile:

$$\sum_1^n(e^{\alpha^i}-1)=\sum^n\frac{\alpha^{i^2}}{i!}+$$

$$(B') \qquad \sum_1^n\alpha^{n(i+n)}\left[\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\right]=\sum\frac{1}{i!}\cdot\frac{\alpha^i}{(1-\alpha)^i}$$

unde:

$$n=1, 2, 3 \ldots \text{ etc.}$$

Se întrebuinţăm ultimul mod de însumare. In acest caz, suma va fi:

$$S_{m,n}=\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{\alpha^{i(p-i+1)}}{i!}\right)_{p=1}+\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{\alpha^{i(p-i+1)}}{i!}\right)_{p=2}+\cdots$$

$$(p=1, 2, 3 \ldots \text{ etc.})$$

[1]) *Laurent* — Traité d'Analyse Matem., vol. I.

în care un termen oarecare p este:

$$\sum_{i=1}^{i=p}\frac{\alpha^{i(p-i+1)}}{i!}=\frac{\alpha^p}{1!}+\frac{\alpha^{2(p-1)}}{2!}+\frac{\alpha^{3(p-2)}}{3!}+\cdots\frac{\alpha^p}{p!}$$

şi care reprezintă suma termenilor ce se găsesc pe linia înclinată de ordinul $(p-1)$.

De aci rezultă următorul şir de identităţi:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha^{i(p-i+1)}}{i!}\right)_{p=1,2\ldots}=\sum_1^n(e^{\alpha^i}-1)$$

$$(C') \qquad \sum_1^n\left(\frac{\alpha^{i(p-i+1)}}{i!}\right)_{p=1,2,3\ldots}=\sum_1^n\frac{1}{i!}\frac{\alpha^i}{(1-\alpha)^i}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha^{i(p-i+1)}}{i!}\right)_{p=1,2,3\ldots}=\sum_1^n\frac{\alpha^{i^2}}{i!}+\sum\alpha^{n(n+i)}\left(\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+i)!}\right)$$

$$n=1, 2 \ldots$$

Cum în cazul seriilor absolut convergente, după o teoremă cunoscută [1]), suma seriei este independentă de ordinea în care se face operaţiunea, urmează că în afară de identităţile arătate, se mai pot scoate şi altele după ordonarea termenilor într'un mod convenabil oarecare.

NOTE MATEMATICE

15. — *Bemerkungen zu den Note Matematice 9, 10, 11, 12.*

Zu den Ausführungen der Herren Prof. *V. Alaci* und Prof. *M. Ghermanescu* im Anschluss an das Problem 1619 gestatte ich mir folgende kurze Bemerkung:

Alaci und *Ghermanescu* geben Solutionen des Systems

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+\ \ ^2+z^2=1. \end{cases}$$

Es ist für beliebiges v lösbar das Sistem

$$\begin{cases} M_1+P_1+Q_1=M_2+P_2+Q_2=M_3+P_3+Q_3=\ldots \\ \qquad\qquad \ldots=M_v+P_v+Q_v=1 \\ M_1^2+P_1^2+Q_1^2=M_2^2+P_2^2+Q_2^2=M_3^2+P_3^2+Q_3^2=\cdots \\ \qquad\qquad \cdots=M_v^2+P_v^2+Q_v^2=1. \end{cases}$$

[1]) *David Emanuel* — Teoria funcţiilor, vol. I.

Exempel für $v=2$:

$$\begin{cases} \dfrac{(-7)+14+14}{21}=\dfrac{(-6)+9+18}{21}=1 \\ \dfrac{(-7)^2+14^2+14^2}{21^2}=\dfrac{(-6)^2+9^2+18^2}{21^2}=1. \end{cases}$$

Da allgemein die Identität

$$\begin{cases} \dfrac{\dfrac{2Q}{s}-Q}{Q}+(s-1)\left(\dfrac{2Q}{s}\right)=1 \\ \left(\dfrac{\dfrac{2Q}{s}-Q}{Q}\right)^2+(s-1)\left(\dfrac{2Q}{s}\right)^2=1 \end{cases}$$

gilt, so ist für beliebiges Q und w das System lösbar

$$\begin{cases} A+B_1+B_2+\cdots+B_w=1 \\ A^2+B_1^2+B_2^2+\cdots+B_w^2=1, \text{ wo } s=w+1; \end{cases}$$

$$A=\frac{\dfrac{2Q}{s}-Q}{Q}\ ;\quad B=\frac{2}{s}$$

und $B_1=B_2=\cdots=B_w$ und $\dfrac{Q}{s}$ eine ganze Zahl ist.

Exempel: $Q=25$, $s=5$, $w=4$ gibt

$$\begin{cases} \left(-\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{2}{5}\right)=1 \\ \left(-\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2=1. \end{cases}$$

Ist $n=2$, dann ist, wenn r genügend gross ist, für beliebiges z lösbar das System

$$\begin{cases} A_1^{\sigma n+1}+A_2^{\sigma n+1}+\cdots+A_r^{\sigma n+1}=1 \\ A_1^{1 n+1}+A_2^{1 n+1}+\cdots+A_r^{1 n+1}=1 \\ A_1^{2 n+1}+A_2^{2 n+1}+\cdots+A_r^{2 n+1}=1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_1^{z n+1}+A_2^{z n+1}+\cdots+A_r^{z n+1}=1. \end{cases}$$

Exempel für $r=7$, $z=2$:

$$\begin{cases} \dfrac{(-21)}{9}+\dfrac{(-31)}{9}+\dfrac{(-39)}{9}+\dfrac{13}{9}+\dfrac{15}{9}+\dfrac{35}{9}+\dfrac{37}{9}=1 \\ \dfrac{(-21)^3}{9^3}+\dfrac{(-31)^3}{9^3}+\dfrac{(-39)^3}{9^3}+\dfrac{13^3}{9^3}+\dfrac{15^3}{9^3}+\dfrac{35^3}{9^3}+\dfrac{37^3}{9^3}=1 \\ \dfrac{(-21)^5}{9^5}+\dfrac{(-31)^5}{9^5}+\dfrac{(-39)^5}{9^5}+\dfrac{13^5}{9^5}+\dfrac{15^5}{9^5}+\dfrac{35^5}{9^5}+\dfrac{37^4}{9^5}=1. \end{cases}$$

Die Frage der Lösbarkeit des Systems

$$\begin{cases} X_1^2+X_2^2+X_3^2+\cdots+X_z^2=1 \\ X_1^4+X_2^4+X_3^4+\cdots+X_z^4=1 \\ X_1^6+X_2^6+X_3^6+\cdots+X_z^6=1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_1^{2n}+X_2^{2n}+X_3^{2n}+\cdots+X_z^{2n}=1 \end{cases}$$

sei dem Leser anheimgestellt.

Es ist allgemein lösbar das System

$$\begin{cases} a+b+c=t^2=x+y+z \\ a+b=u^4 \\ a+c=v^4 \\ b+c=w^4 \\ a^2+b^2+c^2=x^2+y^2+z^2. \end{cases}$$

Exempel für $n=2$, wobei u, v, w rationale Quadrate sind:

$$\begin{cases} (-1044931104)+1087977825+1474912800=38961^2=(-462939786)+(-76004811)+2056904118 \\ (-1044931104)+1087977825=(9^2)^4=9^8 \\ (-1044931104)+1474912800=(12^2)^4=12^8 \\ 1087977825+1474912800=(15^2)^4=15^8 \\ (-1044931104)^2+1087977825^2+1474912800^2=(-462939786)^2+(-76004811)^2+2056904118^2 \end{cases}$$

Das Problem lässt sich noch weiter generalisieren.

ALFRED MOESSNER
(Nürnberg)

16. — *Sur des carrés curieux.*

1. Voici des carrés de dix chiffres tels qu'en les augmentant ou en les diminuant de quelques unités, on obtient des nombres formés des chiffres, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, pris une fois.[1]

$63728^2-1=4061257983$, $85768^2-4=7356149820$

$76625^2-1=5871390624$, $98597^2-4=9721368405$

$78427^2-1=6150794328$, $62651^2+5=3925147806$

$83494^2-1=6971248035$, $65702^2+5=4316752809$

$85555^2-1=7319658024$, $73322^2+5=5230471689$

$97777^2-1=9560341728$, $75152^2+5=5647823109$

$68351^2+2=4671859203$, $82748^2+5=6847231509$

$73345^2+2=5394168027$, $85529^2+5=7315209846$

$76691^2+2=5927614083$, $77587^2-6=6019742563$

$88411^2+2=7816504923$, $75433^2-7=5690137482$

$60089^2+4=3610687925$, $76757^2-7=5891637042$

$60374^2-4=3645019872$, $77053^2-7=5937164802$

$67705^2-4=4583967021$, $77117^2-7=5947031682$

$80584^2-4=6493781052$, $84317^2-7=7109356482$

$82726^2-4=6843591072$, $95837^2-7=9184730562$

$83257^2-4=6931728045$, $69319^2+8=4805123769$.

2. Le carré parfait de neuf chiffres

$$22865^2 = 522808225$$

est *symétrique.*

Les carrés des nombres

$$14835^2 = 220077225 \text{ et } 22620^2 = 511664400,$$

sont des formes $a\,a\,b\,b\,c\,c\,d\,d\,5$ et $5\,p\,p\,q\,q\,r\,r\,s\,s$.

Les tranches de trois chiffres de chacun des carrés

$$14028^2 = 196784784, \quad 27006^2 = 729324036,$$

$$22011^2 = 484484121,$$

sont des carrés parfaits.

Les carrés suivants,

$$18570^2 = 344844900 \text{ et } 24262^2 = 588644044$$

sont de la forme $a\,b\,b\,c\,d\,d\,e\,f\,f$, tandis que le carré

$$22011^2 = 484484121$$

est de la forme $a\,b\,a\,c\,d\,c\,e\,f\,e$.

3. Enfin, voici les carrés de quatre chiffres de la forme $a\,a\,b\,b = (c\,c)^2$ contenus dans le systemè de numération de base $B = 81$.

$$N_1 = \overline{12}\,\overline{12}\,\overline{70}\,\overline{70} = (\overline{31}\,\overline{51})^2$$

$$N_2 = \overline{19}\,\overline{19}\,\overline{63}\,\overline{63} = (\overline{39}\,\overline{39})^2$$

$$N_3 = \overline{21}\,\overline{21}\,\overline{61}\,\overline{61} = (\overline{41}\,\overline{41})^2$$

$$N_4 = \overline{30}\,\overline{30}\,\overline{52}\,\overline{52} = (\overline{49}\,\overline{49})^2$$

$$N_5 = \overline{63}\,\overline{63}\,\overline{19}\,\overline{19} = (\overline{71}\,\overline{71})^2$$

$$N_6 = \overline{78}\,\overline{78}\,\overline{44} = (\overline{79}\,\overline{79})^2.$$

A remarquer, N_2 et N_5 de formes $a\,a\,b\,b$, et $b\,b\,a\,a$; N_3, dont tous les chiffres, supposés dans le systemè décimal, sont terminés par 1 comme B lui même, les nombres $a = 21$, $c = 41$, $b = 61$, $B = 81$ étant les termes consécutifs d'une progression arithmétique de raison $\frac{B-1}{4} = 20$.

V. THÉBAULT
(Le Mans, France)

[1]) Nous avons donné la liste compléte des carrés formés de neuf et de dix chiffres tous différents, Mathesis, 1938–121. (V. T.)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLIII, No. 12, August 1938. † *Regina Maria.* Aritmetica lui *Gheorghe Asachi* (urmare şi sfârşit), de *Petre V. Cazanacli.* Relaţiuni între un patrulater, de *Ad. Gheorghiu.* Formula mediei pentru polinoame (urmare), de *Gh. Mihoc.* Regulamentul premiului „Inginer *H. Capriel*". Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. *Idem*, anul XLIV, No. 1, Septembrie 1938. Lista Membrilor Societăţii „*Gazeta Matematică*". Membrii decedaţi. Concursul „*G. M.*" din 1939. Premii, burse şi publicaţiuni, din fondurile speciale ale Societăţii „*G. M*". Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

3. *Boletin Matematico*, auul XI, No. 11, August 1938, Buenos Aires. Asupra unei generalizări a transformării analitice cu două variabile, de *A. Bloch.* Asupra teoremei determinanţilor cu limită variabilă, de *A. Bloch.* Incercări asupra unei analize arhimediane, de *H. E. Calcagno.* Cercetări asupra teoriei numerilor şi rezultate, de *A. Moessner.* Probleme rezolvate şi propuse.

4. *Idem*, anul XI, No. 12. Complimente la nota „Oarecare identităţi numerice" *B. M.*, anul IX, 1936, de *A. Gloden.* O soluţie importantă, de *B I. B.* Probleme rezolvate şi propuse.

5. *A. Gloden. Sur les égalités multigrades.*
Este o sinteză minunată într'un nou domeniu de teoria numerilor, în care autorul aduce o contribuţie reală, de o mare importanţă. Recomandăm cu plăcere corespondenţilor noştrii această carte. Iată câteva titluri ale cărţii: II. Théorèmes généraux sur les égalités multigrades. III. Egalités vraies aux n premiers degrès avec $(n+1)$ termes par membre pour $n = 2, 3, \ldots 7$. Egalités bigrades. Egalités trigrades,

quintigrades et septigrades. Egalités quadrigrades et sextigrades. IV. Quelques égalités multigrades d'un ordre plus élevé. V. Egalités multigrades particulieres. VI. Problèmes se rattachant à celui de résolution des équations multigrades. VII. Chaînes multigrades. VIII. Applications des égalités multigrades. (*A. Gloden*, Rue Jean Taurès 11, Luxembourg. Prix 25 frs. belges).

6. *A. Gloden.* Sur les puissances des membres entiers de la forme $m^2 + amn + n^2$.

PROBLEME REZOLVATE

1569. — *Intr'un triunghiu dreptunghic* A B C *se duce înălţimea* A D. *Fie* r, r_1, r_2 *respectiv razele cercurilor înscrise în triunghiurile* A B C, A B D *şi* A C D. *Să se demonstreze că avem relaţia,*

$$c r_1 + b r_2 = a r,$$

unde a este ipotenuza, iar b şi c catetele triunghiului A B C.

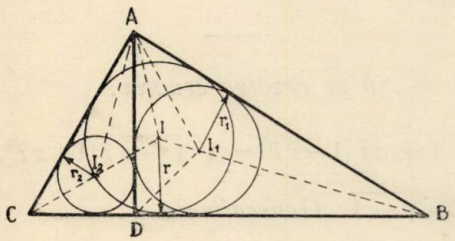
V. Alaci

Soluţie dată de d-nii: *A. Gloden* (Luxembourg) şi *E. Vişa* (Blaj).

I, I_1, I_2 fiind centrele cercurilor înscrise în triunghiurile A B C, A B D şi A C D, se observă că triunghiurile B I C, B I_1 A şi A I_2 C sunt asemenea, având:

$$\widehat{IBC} = \widehat{I_1BA} = \widehat{I_2AC} = \frac{B}{2}$$

$$\widehat{ICD} = \widehat{I_1AB} = \widehat{I_2CB} = \frac{C}{2}.$$



Din asemănarea acestor triunghiuri, rezultă:

$$\frac{r_1}{r} = \frac{c}{a}, \qquad \frac{r_2}{r} = \frac{b}{a}.$$

deci:

$$(1) \qquad c r_1 + b r_2 = \frac{c^2 r}{a} + \frac{b^2 r}{a} = \frac{(b^2 + c^2) r}{a}.$$

Cum însă,

$$(2) \qquad b^2 + c^2 = a^2,$$

relaţia (1) devine:

$$c r_1 + b r_2 = a r,$$

ceeace trebuia demonstrat.

Soluţia 2-a. Notaţiile fiind cele obicinuite, avem:

$$(3) \qquad r = \frac{S}{p} = \frac{bc}{2p} = \frac{bc}{a+b+c}.$$

Formula (3) dă pentru r_1 şi r_2:

$$(4) \quad r_1 = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{AD}}{c + \overline{BD} + \overline{AD}}, \qquad r_2 = \frac{\overline{CD} \cdot \overline{AD}}{b + \overline{CD} + \overline{AD}}.$$

Dar din triunghiul dreptunghic A B C, deducem,

$$\overline{BD} = c \cos B = \frac{c^2}{a}, \qquad \overline{CD} = b \cos C = \frac{b^2}{a},$$

$$\overline{AD} = c \sin B = \frac{bc}{a},$$

astfel că relaţiunile (4) devin:

$$r_1 = \frac{bc^3}{a^2\left(c + \frac{c^2}{a} + \frac{bc}{a}\right)} = \frac{bc^2}{a(a+b+c)}$$

$$r_2 = \frac{b^3 c}{a^2\left(b + \frac{b^2}{a} + \frac{bc}{a}\right)} = \frac{b^2 c}{a(a+b+c)}.$$

De aci deducem succesiv, având în vedere relaţiile (2) şi (3):

$$c r_1 + b r_2 = \frac{bc(c^2 + b^2)}{a(a+b+c)} = a \cdot \frac{bc}{a+b+c} = a r.$$

Soluţii date de d-ra *Comloşan Cornelia* (Cluj) şi de d-nii *Aman V. C-tin* (Şc. Polit, Timişoara), *Andrievici N.* (lic. Milit, N. Filipescu), *Andrunachievici Vladimir* (student, Iaşi), *Apostol Radu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Berinde L. Titus* (Şc. Polit., Timişoara), *Buznea D. Dinu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Cristescu Dan* (lic. Braşov), *Dăscălescu Hristache* (Focşani), *Deciulescu Gh.* (Buzău), *Diaconescu D. Ion* (lic. T-Severin), *Florescu Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Jidanu I. C-tin* (lic. Beiuş), *Kornis Ernest* (lic. Loga, Timişoara), *Lupescu Corneliu* (Sub-Lt), *Manuilă Alexandru* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Matei D. D-tru* (bacalaureat, Iaşi), *Modâlcă S. Emil* (lic. T-Severin), *Murgu V. Marţian* (Şc. Polit, Timişoara), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Popescu Adrian* (Sub-Lt), *Popescu-Zorica N. Alexandru* (Bucureşti), *Rădulescu Gh. Octavian* (lic. Militar, N. Filipescu), *Ripianu Andrei*, *Rosenblat S. Millu* (lic.

Internat, Iaşi), *Saegiu V. C-tin* (Cluj), *Segal Joe* (Bucureşti), *Stavov Iacob* (Bolgrad), *Stefănescu D. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu), *Stoenescu D. Mirel* (lic. Milit., N. Filipescu), *Tica P. Marin-Gall* (Sub-Lt), *Tilică Gh Ştefan* (lic. T-Severin), *Vijilie Gh. Eugen* (lic. Milit., N. Filipescu) şi *Vlad I. C. Mihai* (Locot).

Observare. D-nii: *Jipa C. Alexandru* (lic. Milit., Iaşi) şi *Theodorescu N. Dorin* (lic. Milit., N. Filipescu), au stabilit relaţia din enunţ pentru cazul când r, r_1, r_2 sunt razele cercurilor circumscrise aceloraşi triunghiuri din enunţ. Acest caz este de fapt foarte simplu întru cât

$$a = 2r, \qquad b = 2r_2, \qquad c = 2r_1,$$

iar:

$$c r_1 + b r_2 = \frac{c^2 + b^2}{2} = \frac{a^2}{2} = a \cdot \frac{a}{2} = ar.$$

1620. — *Dacă* $x + y + z = 0$, *avem:*

$$3x^2 + (y - z)^2 = 3y^2 + (z - x)^2 = 3z^2 + (x - y)^2.$$

Caz particular: $x = \cos^2 \alpha$, $y = \sin^2 \alpha$.

N. N. MIHAILEANU

1°. Din relaţia dată deducem:

$$z = -(x + y),$$

astfel că putem scri evident:

$$x^2 - yz = x^2 + y(x + y) = x^2 + xy + y^2$$

$$y^2 - xz = y^2 + x(x + y) = x^2 + xy + y^2$$

$$z^2 - xy = [-(x + y)]^2 - xy = x^2 + xy + y^2.$$

Rezultă de aci că putem scri:

$$2(x^2 - yz) = 2(y^2 - xz) = 2(z^2 - xy).$$

Adunând fiecărui membru, $x^2 + y^2 + z^2$, obţinem cu uşurinţă.

$$3x^2 + (y - z)^2 = 3y^2 + (z - x)^2 = 3z^2 + (x - y)^2.$$

care este tocmai identitatea cerută.

2°. In cazul particular dat, rezultă

$$z = -(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = -1,$$

iar identitatea din enunţ devine:

$$3\cos^4 \alpha + (\sin^2 \alpha + 1)^2 = 3\sin^4 \alpha +$$

$$(1) \qquad (1 + \cos^2 \alpha)^2 = 3 + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2$$

$$= 3 + \cos^2 2\alpha.$$

Această identitate se poate verifica direct. In adevăr putem scri succesiv:

$$3\cos^4 \alpha + (\sin^2 \alpha + 1)^2 =$$

$$3\left(\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{3 - \cos 2\alpha}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{3 + 6\cos 2\alpha + 3\cos^2 2\alpha + 9 - 6\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha}{4} =$$

$$\frac{12 + 4\cos^2 2\alpha}{4} = 3 + \cos^2 2\alpha,$$

$$3\sin^4 \alpha + (1 + \cos^2 \alpha)^2 =$$

$$3\left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{3 + \cos 2\alpha}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{3 - 6\cos 2\alpha + 3\cos^2 2\alpha + 9 + 6\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha}{4} =$$

$$\frac{12 + 4\cos^2 2\alpha}{4} = 3 + \cos^2 2\alpha.$$

Identitatea (1) este astfel verificată.

Soluţii date de d-nii: *Andrievici N.* (lic. Milit, N. Filipescu), *Andrunachievici Vl.* (student, Cluj), *Buznea D. Dinu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Cetăţeanu Stelian* (lic. Şincai, Bucureşti), *Dăscălescu Şt. Hristache* (Focşani), *Diaconescu D. Ion* (lic. T-Severin), *Drăgulescu Gh. Gheorghe* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Jidanu C-tin* (lic. Beiuş), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Millu I. Nicolae* (Şc. Navală, Constanţa), *Mironescu I. Dumitru* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Modâlca S. Emil* (lic. T-Severin), *Motăş Camil* (lic. Internat, Iaşi), *Popescu Adrian* (Sub-Lt), *Popoviciu Gabriel* (student), *Popoviciu Mircea* (lic. Lugoj), *Reischer L. Herman* (lic. Internat, Iaşi), *Roth I. Alexandru* (lic. Arad), *Şandor Vasile*, *Segal Joe* (Bucureşti), *Segal Zigu* (lic. Vaslui), *Solomon I. Isac* (lic. Internat Iaşi), *Staicu I. N.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Stefănescu F. Marin* (Sub-Lt), *Stoenescu D. Mirel* (lic. Milit, N. Filipescu), *Tătaru Alexandru* (lic. Orăştie), *Tica P. Marin* (Sub-Lt), *Tilică C. Ştefan* (lic. T-Severin), *Topalescu S. Gheorghe* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Vlad I. C. Mihai* (Locot), şi *Voicu I. Aurelian* (lic. Milit., Tg-Mureş).

1635. — *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\sqrt{1 + ai}\,(1 - xi)^6 = \sqrt{1 - ai}\,(1 + xi)^6,$$

unde $i = \sqrt{-1}$. *Generalizare.*

D-TRU MATEI

Soluţia autorului.

Ecuaţia dată se mai poate pune sub forma

$$(1) \qquad \frac{(1 + xi)^6}{(1 - xi)^6} = \frac{(1 + ai)^{\frac{1}{2}}}{(1 - ai)^{\frac{1}{2}}}.$$

Dacă notăm,

(2) $$x = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}, \qquad a = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

avem succesiv:

$$\frac{1+xi}{1-xi} = \frac{1+i\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1-i\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}} =$$

$$\frac{\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}} = .$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}+2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}.$$

Cum:

$$\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\cos\theta \text{ şi } 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\sin\theta,$$

rezultă:

$$\frac{1+xi}{1-xi}=\cos\theta+i\sin\theta.$$

Analog:

$$\frac{1+ai}{1-ai}=\cos\alpha+i\sin\alpha.$$

Rezultă de aci că ecuaţia (1) devine:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^6=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{\frac{1}{2}},$$

sau după formulele lui *Euler*, mai putem scri:

$$e^{6\theta i}=e^{\left(\frac{\alpha}{2}+2k\pi\right)i}.$$

De aci rezultă

$$6\theta=2k\pi+\frac{\alpha}{2}$$

şi deci:

$$\theta_k=\frac{k\pi}{3}+\frac{\alpha}{12},$$

$$(k=0,1,2,3,4,5).$$

Rezultă de aci că ecuaţia dată, ţinând seamă de (2), are următoarele soluţii:

$$x_1=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{24}, \qquad x_2=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{24}\right),$$

$$x_3=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{24}\right), \qquad x_4=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{24}\right),$$

$$x_5=\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{24}\right), \qquad x_6=\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{\alpha}{24}\right).$$

Generalizare. Ecuaţia dată, generalizată devine:

$$(1+ai)^m(1-xi)^n=(1-ai)^m(1+xi)^n.$$

Pentru a rezolva procedăm analog ca mai sus şi obţinem rădăcinele:

$$x_k=\operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{m\alpha}{2n}\right),$$

$$[k=0,1,2,\ldots,(n-1)].$$

A 2-a soluţie. Trecem direct la forma generală

$$(1+ai)^m(1-xi)^n=(1-ai)^m(1+xi)^n.$$

Această ecuaţie se mai poate scri:

$$\left(\frac{1+xi}{1-xi}\right)^n=\left(\frac{1+ai}{1-ai}\right)^m.$$

De aci deducem:

(3) $$\frac{1+xi}{1-xi}=\frac{\sqrt[n]{(1+ai)^m}}{\sqrt{(1-ai)^m}}\sqrt[n]{1},$$

unde:

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}=e^{\frac{2k\pi i}{n}},$$

$$[k=0,1,2,\ldots,(n-1].$$

In (3) aplicând o proprietate cunoscută a proporţiilor şi în urmă împărţind cu i, obţinem:

$$x=\frac{1}{i}\cdot\frac{\sqrt[n]{(1+ai)^m}\,e^{\frac{2k\pi i}{n}}-\sqrt[n]{(1-ai)^m}}{\sqrt[n]{(1+ai)^m}\,e^{\frac{2k\pi i}{n}}+\sqrt[n]{(1-ai)^n}},$$

$$[k=0,1,2,\ldots,(n-1)].$$

Au soluţionat în felul acesta problema, d-nii: *Buznea D. Dinu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Jidanu I. C-tin* (lic. Beiuş), *Ştefănescu F. Marin* (Sub-Lt) şi *Tilica C. Ştefan* (lic. T-Severin).

1650. — *Să se rezolve ecuaţiile*

$$\sqrt{x^2+2\sqrt{x^2-1}}\pm\sqrt{x^2-2\sqrt{x^2-1}}=2$$

$$\sqrt{x^2+2\sqrt{x^2-1}}\pm\sqrt{x^2-2\sqrt{x^2-1}}=2\sqrt{x^2-1}\,.$$

L-T C. IONESCU-ŢIU

Facem substituţia,

$$x^2-1=z^2 \tag{1}$$

şi ecuaţiile date devin respectiv:

$$\sqrt{z^2+1+2z}\pm\sqrt{z^2+1-2z}=2$$

$$\sqrt{z^2+1+2z}\pm\sqrt{z^2+1-2z}=2z\,.$$

Aceste ecuaţii se mai pot scri evident:

$$z+1\pm(z-1)=2 \tag{2}$$

$$z+1\pm(z-1)=2z\,. \tag{3}$$

1°. Dacă în ecuaţia (2), luăm înaintea parantezei semnul +, avem,

$$z=1\,;$$

iar dacă luăm semnul — avem o identitate.

Dar dacă $z=1$, din (1) rezultă că prima ecuaţie din enunţ are rădăcinile:

$$x=\pm\sqrt{2}\,,$$

care se verifică şi direct.

2°. Ecuaţia (3) devine o identitate, dacă luăm înaintea parantezei semnul +; dacă luăm — însă, obţinem,

$$z=1$$

şi iarăşi

$$x=\pm\sqrt{2}\,.$$

Aceste rădăcini se pot verifica şi direct.

Soluţie analoagă dată de d-l *Şandor Vasile*.

Au rezolvat ecuaţia prin ridicări la patrat, d-nii: *Bakonyi C.* (lic. Loga Timişoara), *Bârlea G. Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Brădeanu Nicolae* (lic. Beiuş), *Dăscălescu Şt. Hristache* (Focşani), *Diaconescu D. Ion* (lic. T-Severin), *Gligor N. Ioan* (lic. Arad), *Jidanu I. C-tin* (lic. Beiuş), *Lepolszky Carol*, *Mihăileanu C. Andrei* (lic. Arad), *Moldovan Cornel* (Tg-Mureş), *Popa D. Mircea* (lic. Milit., Iaşi), *Popoviciu C. Mircea* (lic. Lugoj), *Segal Zigu* (lic. Vaslui), *Şelmereanu H.* (lic. Orăştie), *Slavov Iacob* (Bolgrad), *Tătaru Alexandru* (lic. Orăştie), *Tilică C. Ştefan* (lic. T. Severin), şi *Turcu R. Sandu* (lic. Milit., Iaşi).

1663. *Să se rezolve sistemul*:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}=-\dfrac{7}{12} \\ xy+yz+zx=0 \\ \dfrac{1}{x^3y^3}+\dfrac{1}{y^3z^3}+\dfrac{1}{z^3x^3}=-\dfrac{235}{1728}\,. \end{cases}$$

SUB-LT MIRCEA GRUMAZESCU

Notăm:

$$x^{-1}=u,\quad y^{-1}=v,\quad z^{-1}=w \tag{1}$$

şi atunci sistemul dat devine:

$$\begin{cases} uv+vw+wu=-\dfrac{7}{12} \\ u+v+w=0 \\ (uv)^3+(vw)^3+(wu)^3=-\dfrac{235}{1728}\,. \end{cases} \tag{2}$$

Ridicând prima ecuaţie la cub şi ţinând seamă de a 2-a şi a 3-a ecuaţie, avem

$$\left(\sum uv\right)^3=\sum(uv)^3+$$

$$3uvw(u+v)(v+w)(w+u)=-\frac{343}{1728}\,,$$

sau:

$$\frac{-235}{1728}+3uvw(-w)(-u)(-v)=-\frac{343}{1728}\,.$$

De aci deducem:

$$3(uvw)^2=\frac{343-235}{1728}=\frac{9}{144}\,,$$

deci:

$$uvw=\pm\frac{\sqrt{3}}{12}\,.$$

Sistemul (2) este astfel echivalent cu următoarele:

$$\begin{cases} u+v+w=0 \\ uv+vw+wu=-\dfrac{7}{12} \\ uvw=\dfrac{\sqrt{3}}{12} \end{cases} \tag{3}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} u+v+w=0 \\ uv+vw+wu=-\dfrac{7}{12} \\ uvw=-\dfrac{\sqrt{3}}{12}. \end{cases}$$

Având în (3) şi (4) cunoscute suma, suma produselor câte două şi produsul necunoscutelor u, v, w, rezultă că aceste necunoscute sunt respectiv rădăcinele ecuaţiilor:

$$(3')\qquad 12t^3-7t-\sqrt{3}=0,$$

$$(4')\qquad 12t^3-7t+\sqrt{3}=0.$$

1°. *Rezolvirea ecuaţiei* (3'). Ecuaţia (3') se mai poate scri:

$$(2t-\sqrt{3})(6t^2+3\sqrt{3}t+1)=0,$$

deci:

$$t_1=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad t_2=\frac{-3\sqrt{3}+\sqrt{3}}{12}=-\frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$t_3=\frac{-3\sqrt{3}-\sqrt{3}}{12}=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Rădăcinele t_1, t_2, t_3 sunt într'o ordine oarecare u, v, w pe care inversându-le obţinem pe x, y, z în virtutea notaţiilor (1).

Rezultă astfel că sistemul dat, are în acest caz sistemele de soluţii:

x	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{6}{\sqrt{3}}$	$-\frac{6}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
y	$-\frac{6}{\sqrt{2}}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{6}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
z	$-\sqrt{3}$	$-\frac{6}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{6}{\sqrt{3}}$

2°. *Rezolvirea ecuaţiei* (4'). Rădăcinele ecuaţiei (4') sunt aceleaşi ca ale ecuaţiei (3'), în care trebuie să schimbăm numai semnul lui $\sqrt{3}$. Sitemul dat are deci încă şase sisteme de soluţii, egale şi de semne contrare cu acelea din tabloul de mai sus.

Soluţii date de d-nii: *Jidanu I. C-tin* (lic. Beiuş), *Lupescu Corneliu* (Sub-Lt), *Matei I. Augustin* (student, Cluj), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Popa D. Mircea* (lic. Milit., Iaşi), *Rohr I. Alexandru* (lic. Milit., Iaşi), *Stoenescu D. Mirel* (lic. Milit, N. Filipescu), *Segal Zigu* (lic. Vaslui).

Observare. Soluţia de mai sus a fost redactată în mare parte după soluţie d-lui *Negrea A. Mircea* (Brăila).

Soluţia 2-a. Notând:

$$(1)\qquad \frac{1}{xy}=u,\quad \frac{1}{yz}=v,\quad \frac{1}{zx}=w,$$

sistemul dat devine:

$$(2)\qquad \begin{cases} u+v+w=-\dfrac{7}{12} \\ uv+vw+wu=0 \\ u^3+v^3+w^3=-\dfrac{235}{1728}. \end{cases}$$

Ridicând la patrat prima ecuaţie şi ţinând seamă de a 2-a, obţinem:

$$(3)\qquad u^2+v^2+w^2=\frac{49}{144}.$$

Putem privi pe u, v, w ca rădăcinele ecuaţiei de gradul al 3-lea,

$$(4)\qquad t^3+A_1t^2+A_2t+A_3=0$$

în care trebueşte determinat A_1, A_2, A_3. [1]

Cum cunoaştem suma, suma patratelor şi suma cuburilor rădăcinelor u, v, w a ecuaţiei (4), iar pe de altă parte cum cunoaştem formulele lui *Newton* care ne dau suma puterilor asemeni a rădăcinelor unei ecuaţii în funcţie de coeficienţii ei, urmează că putem scri:

$$\begin{cases} \sum u=-A_1=-\dfrac{7}{12} \\ \sum u^2=A_1^2-2A_2=\dfrac{49}{144} \\ \sum u^3=-A_1^3+3A_1A_2-3A_3=-\dfrac{235}{1728}. \end{cases}$$

De aci deducem cu uşurinţă:

$$A_1=\frac{7}{12},\ A_2=0,\ A_3=\frac{1}{3}\left(-\frac{343}{1728}+\frac{235}{1728}\right)=-\frac{1}{48}.$$

Ecuaţia (4) devine

$$(5)\qquad 48t^3+28t^2-1=0$$

sau punând: $t=\dfrac{1}{z}$, ecuaţia (5) devine:

$$z^3-28z-48=0,$$

[1] A se vedea articolul d-lui Prof. *Ioan Curea*, intitulat: Asupra rezolvării sistemelor de ecuaţii de grad superior. (R. M. T., vol. XVII, p. 27).

care se descompune astfel:

$$(z+2)(z+4)(z-6)=0.$$

Rădăcinele u, v, w ale ecuației (5) sunt deci într'o ordine oarecare:

$$u=\frac{1}{6},\quad v=-\frac{1}{2},\quad w=-\frac{1}{4}.$$

Având în vedere relațiile de transformare (1), găsim:

$$(6)\qquad \begin{cases} xy=6 \\ yz=-2 \\ zx=-4. \end{cases}$$

Inmulțind aceste ecuații și extrăgând rădăcina patrată, avem

$$xyz=\pm 4\sqrt{3}.$$

Impărțind această ecuație pe rând cu ecuațiile sistemului (6) obținem:

$$z=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3},\quad x=\mp 2\sqrt{3},\quad y=\mp\sqrt{3}.$$

Schimbând între ei pe x, y, z avem toate soluțiile obținute prin prima metodă.

Soluție analoagă dată de d-l *Stefănescu F. Marin* (Sub-Lt).

PROBLEME PROPUSE

1712. — Un număr de trei cifre fiind scris în sistemele de numerație cu bazele $(B-1)$, B și $(B+1)$, reproduc patratele perfecte a trei numere consecutive. Care sunt cifrele acelui număr?

CPT. CD I. LINTES

1713. — In ce sistem de numerație, un număr de forma $aabb$ este el patratul numărului de două cifre cc, fiind dat că $c+1$ este egal cu $2a$?

V. THÉBAULT

1714. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ xy+yz+zx=3(1-a) \\ (1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)=a^3. \end{cases}$$

LT C D IONESCU-ȚIU

1715. — Să se găsească soluțiile întregi a sistemelor:

$$\begin{cases} x^2+ay^2+bz^2=t^2 \\ x+y+z=t \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+x^2+z^2=t^2 \\ x+ay+bz=t, \end{cases}$$

a și b sunt întregi dați (pozitivi, negativi sau nuli).

A. GLODEN

1716. — Să se construiască triunghiul ABC cunoscând baza BC, unghiul A și știind că AB și AC întâlnesc cercul de diametru BC în punctele M și N așa în cât MN este perpendiculară pe BC.

G L GH. BUICLIU

1717. — Prin O, depe dreapta $x'x$, se duce semidreapta $OA=l$ făcând un unghiu α cu $x'x$. Să se determine unghiul β pe care trebuie să'l formeze semidreapta $OB=2l$ cu OA pentru ca cercul circumscris triunghiului AOB să fie tangent în O dreptei $x'x$. Relația care determină pe β este:

$$\sin(\beta+\alpha)=2\sin\alpha.$$

Intre ce limite poate varia α pentru ca să existe soluție. Caz particular când $\alpha=30^0$.

AUGUST COMAN

1718. — Un submarin navigând în imersiune are o înălțime h de periscop deasupra nivelului apei. La un moment dat catargul unei nave este văzut de vârful periscopului sub unghiul α. Dacă înălțimea catargului este H, se cere distanța orizontală de la submarin la navă. Aplicație $h=2\,m$, $H=20\,m$, $\alpha=1^0{,}50'$.

LT C V. COSTACHESCU

1719. — Intr'un triunghiu semidreptunghic ABC $(A=45^0)$ se cunosc sumele $a+b=m$, $a+c=n$. Se cere să se rezolve triunghiul.

V ALACI

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Anton G. George (1587, 1603, 1625, 1626, 1637, 1683, 1690); *Aniţescu N.* (P., 1574, 1583, 1587, 1594, 1597, 1602, 1603, 1606, 1614, 1617, 1620, 1622, 1625, 1626, 1633, 1634, 1637, 1638, 1640, 1647, 1648, 1649, 16 2, 1653, 1654, 1659, 1660, 1664, 1666, 1668, 1674, 1676, 1681, 1683, 1687, 1688; 1689, 1690, 1693, 1696, 1697, 1699, 1702- 1703, 1704, 1710), *Cerchez Mihu* (P., 1673); *Dăscălescu Şt. Hristache* (1447, 1646, 1663, 1677, 1700); *Georgescu Benone* (P., 1684, 1688, 1691, 1692, 1693, 1696, 1703); *Gligor N. Ioan* (1690, 1704); *Jidanu C-tin* (N. P., 1478); *Lepolszky Carol* (1610, 1688, 1696, 1697, 1699, 1703); *Moldovan Cornrl* (1586, 1620, 1681, 1683, 1689, 1690); *Salgiu C-tin* (1581, 161', 1683, 1688, 1704); *Sandor Vasile* (1681, 1688, 1693, 1696, 1703, 1704); *Slavov Iacob* (1638, 1690, 1691, 1703); *Stefănescu Marin* (P., 1696, 1704, 1705, 1707); *Tătaru Alexandru* (1690, 1696, 1699, 1701); *Tilică C. Stefan* (P., 1569, 1582, 1648, 1655, 1659, 1664, 1668, 1673, 1674, 1681, 1682, 1683, 1684, 1688, 1689, 1690, 1691, 1692, 1693, 1696, 1697, 1698, 1699, 1700, 1701, 1702, 1703).

INFORMAŢIUNI

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL XI-LEA

care a început în Martie 1938.

Costul *special* a unui abonament este de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Pentru anul al XI, care a început în Martie 1938, s'a primit până acum la Redacţia „R. M. T." următorul abonament:

1. *Prof. Sergescu P.,* Universitatea, Cluj.

A APĂRUT IN BIBLIOTECA GAZETEI MATEMATICE:

CULEGERE DE PROBLEME DE TRIGONOMETRIE

Partea II,

Preţul 125 Lei — TRIGONOMETRIA PLANĂ

Acei care se interesează de identităţile în numere întregi de diferite grade, în special cu problemele *Tarry,* sunt rugaţi a intra în corespondenţă cu mine, *Alfred Moessner* Nürnberg (Germania), Grolandstrasse 79.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS:
1 an: Belgique, **30 fr.** France, **25** fr.
Etranger, 7 **belgas**

Administration:
SPHINX, Bruxelles 173, Avenue Longchamp

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş

ANUL XVIII. 15 NOEMVRIE 1938 No. 9.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **A. GLODEN:** SUR LES SOLUTIONS ENTIÈRES DE L'ÉQUATION DIOPHANTIENNE $x^2+axy+by^2=z^k$.
2. **C. BORS:** O PROPRIETATE A SFEREI OSCULATOARE LA O CURBA STRAMBA.
3. NOTE MATEMATICE: 17, 18, 19.
4. CHESTIUNI DE EXAMEN.
5. BIBLIOGRAFIE.
6. PROBLEME REZOLVATE: 1009, 1263, 1266, 1435, 1587, 1603, 1606.
7. PROBLEME PROPUSE: 1720-1727.
8. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVIII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVIII inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XVIII — NO. 9 TIMISOARA, 15 NOEMVRIE 1938

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

SUR LES SOLUTIONS ENTIÈRES DE L'ÉQUATION DIOPHANTIENNE

$$x^2 + a\,x\,y + b\,y^2 = z^k.$$

Par A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

A. Nous avons publié dans Mathesis [1] les formules de résolution suivantes pour l'équation

$$x^2 + a\,x\,y + b\,y^2 = z^k, \quad z = m^2 + a\,m\,n + b\,n^2.$$

1°. Si k est un nombre pair $2u$,

$$x_k = m^k - b\,(C_k^2\,m^{k-2}\,n^2 + C_k^3\,\varphi_2\,m^{k-3}\,n^3 + \cdots$$
$$\cdots + C_k^u\,\varphi_{u-1}\,m^u\,n^u + C_k^{u-1}\,\varphi_u\,m^{u-1}\,n^{u+1} + \cdots$$
$$\cdots + C_k^1\,\varphi_{k-2}\,m\,n^{k-1} + \varphi_{k-1}\,n^k),$$

$$y_k = C_k^1\,m^{k-1}\,u + C_k^2\,\varphi_2\,m^{k-2}\,n^2 + \cdots$$
$$\cdots + C_k^u\,\varphi_u\,m^u\,n^u + C_k^{u-1}\,\varphi_{u+1}\,m^{u-1}\,n^{u+1} + \cdots$$
$$\cdots + C_k^1\,\varphi_{k-1}\,m\,n^{k-1} + \varphi_k\,n^k.$$

2°. Si k est un nombre impair $2u+1$,

$$x_k = m^k - b\,(C_k^2\,m^{k-2}\,n^2 + C_k^3\,\varphi_2\,m^{k-3}\,n^3 + \cdots$$
$$\cdots + C_k^u\,\varphi_{u-1}\,m^{u+1}\,n^u + C_k^u\,\varphi_u\,m^u\,n^{u+1} + \cdots$$
$$\cdots + C_k^1\,\varphi_{k-2}\,m\,n^{k-1} + \varphi_{k-1}\,n^k),$$

$$y_k = C_k^1\,m^{k-1}\,n + C_k^2\,\varphi_2\,m^{k-2}\,n^2 + \cdots$$
$$\cdots + C_k^u\,\varphi_u\,m^{u+1}\,n^u + C_k^u\,\varphi_{u+1}\,m^u\,n^{u+1} + \cdots$$
$$\cdots + C_k^1\,\varphi_{k-1}\,m\,n^{k-1} + \varphi_k\,n^k.$$

[1]) Sur les puissances des nombres entiers de la forme $m^2 + a\,m\,n + b\,n^2$, Mathesis, Tome LII, année 1938, N-os 6–7 juin – juillet, pp. 172–4.

Dans ces formules, les φ_i désignent des polynômes en a et b qui sont liés par la relation de recurrence

$$\varphi_i = a\,\varphi_{i-1} - b\,\varphi_{i-2},$$

applicable à partir de $i=2$ si l'on convient de faire $\varphi_0 = 0$ et $\varphi_1 = 1$.

On a la formule générale

$$\varphi_i = a^{i-1} + \Sigma(-1)^{j-1}\,C_{i-j}^{j-1}\,a^{i-2j+1}\,b^{j-1},$$

la somme Σ s'étendant de $j=2$ à $\frac{i}{2}$ ou à $\frac{i+1}{2}$ suivant que i est pair on impair.

Les coefficients des polynômes φ_i sont donc 1, puis les nombres entiers, les nombres triangulaires, les nombres pyramidaux et les pyramidaux de plus de 3 dimensions, les signes des termes de φ_i alternant.

B. Polynômes φ_i pour $i=2$ jusqu'à $i=20$ incl.

$$\varphi_2 = a$$
$$\varphi_3 = a^2 - b$$
$$\varphi_4 = a^3 - 2\,a\,b$$
$$\varphi_5 = a^4 - 3\,a^2\,b + b^2$$
$$\varphi_6 = a^5 - 4\,a^3\,b + 3\,a\,b^2$$
$$\varphi_7 = a^6 - 5\,a^4\,b + 6\,a^2\,b^2 - b^3$$
$$\varphi_8 = a^7 - 6\,a^5\,b + 10\,a^3\,b^2 - 4\,a\,b^3$$
$$\varphi_9 = a^8 - 7\,a^6\,b + 15\,a^4\,b^2 - 10\,a^2\,b^3 + b^4$$
$$\varphi_{10} = a^9 - 8\,a^7\,b + 21\,a^5\,b^2 - 20\,a^3\,b^3 + 5\,a\,b^4$$
$$\varphi_{11} = a^{10} - 9\,a^8\,b + 28\,a^6\,b^2 - 35\,a^4\,b^3 + 15\,a^2\,b^4 - b^5$$
$$\varphi_{12} = a^{11} - 10\,a\,b^9 + 36\,a^7\,b^2 - 56\,a^5\,b^3 + 35\,a^3\,b^4 - 6\,a\,b^5$$

$$\varphi_{13} = a^{12} - 11\,a^{10}\,b + 45\,a^9\,b^2 - 84\,a^6\,b^3 + 70\,a^4\,b^4 - 21\,a^2\,b^5 + b^6$$

$$\varphi_{14} = a^{13} - 12\,a^{11}\,b + 55\,a^{10}\,b^2 - 120\,a^7\,b^3 + 126\,a^5\,b^4 - 56\,a^3\,b^5 + 7\,a\,b^5$$

$$\varphi_{15} = a^{14} - 13\,a^{12}\,b + 66\,a^{11}\,b^2 - 165\,a^8\,b^3 + 210\,a^6\,b^4 - 126\,a^4\,b^5 + 28\,a^2\,b^6 - b^7$$

$$\varphi_{16} = a^{15} - 14\,a^{13}\,b + 78\,a^{12}\,b^2 - 220\,a^9\,b^3 + 330\,a^7\,b^4 - 252\,a^5\,b^5 + 84\,a^3\,b^6 - 8\,a\,b^7$$

$$\varphi_{17} = a^{16} - 15\,a^{14}\,b + 91\,a^{13}\,b^2 - 286\,a^{10}\,b^3 + 496\,a^8\,b^4 - 462\,a^6\,b^5 + 210\,a^4\,b^6 - 36\,a^2\,b^7 + b^8$$

$$\varphi_{18} = a^{17} - 16\,a^{15}\,b + 105\,a^{14}\,b^2 - 364\,a^{11}\,b^3 + 715\,a^9\,b^4 - 792\,a^7\,b^5 + 462\,a^5\,b^6 - 120\,a^3\,b^7 + 9\,a\,b^8$$

$$\varphi_{19} = a^{18} - 17\,a^{16}\,b + 120\,a^{15}\,b^2 - 455\,a^{12}\,b^3 + 1001\,a^{10}\,b^4 - 1287\,a^8\,b^5 + 924\,a^6\,b^6 - 330\,a^4\,b^7 + 45\,a^2\,b^8 - b^9$$

$$\varphi_{20} = a^{19} - 18\,a^{17}\,b + 136\,a^{16}\,b^2 - 560\,a^{13}\,b^3 + 1365\,a^{11}\,b^4 - 2002\,a^9\,b^5 + 1716\,a^7\,b^6 - 92\,a^5\,b^7 + 165\,a^3\,b^8 - 10\,a\,b^9.$$

C. *Solution générale explicitée pour* $k = 5, 6 \ldots 10$.

$$k = 5\,; \quad x = m^5 - b\,[10\,m^3\,n^2 + 10\,a\,m^2\,n^3 + 5\,(a^2 - b)\,m\,n^4 + (a^3 - 2\,a\,b)\,n^5]\,;$$

$$y = 5\,m^4\,n + 10\,a\,m^3\,n^2 + 10\,(a^2 - b)\,m^2\,n^3 + 5\,(a^3 - 2\,a\,b)\,m\,n^4 + (a^4 - 3\,a^2\,b + b^2)\,n^5.$$

$$k = 6\,; \quad x = m^6 - b\,[15\,m^4\,n^2 + 20\,a\,m^3\,n^3 + 15\,(a^2 - b)\,m^2\,n^4 + 6\,(a^3 - 2\,a\,b)\,m\,n^5 + (a^4 - 3\,a^2\,b + b^2)\,n^6]\,;$$

$$y = 6\,m^5\,n + 15\,a\,m^4\,n^2 + 20\,(a^2 - b)\,m^3\,n^3 + 15\,(a^3 - 2\,a\,b)\,m^2\,n^4 + 6\,(a^4 - 3\,a^2\,b + b^2)\,m\,n^5 + (a^5 - 4\,a^3\,b + 3\,a\,b^2)\,n^6\,;$$

$$k = 7\,; \quad x = m^7 - b\,[21\,m^5\,n^2 + 35\,a\,m^4\,n^3 + 35\,(a^2 - b)\,m^3\,n^4 + 21\,(a^3 - 2\,a\,b)\,m^2\,n^5 + 7\,(a^4 - 3\,a^2\,b + b^2)\,m\,n^6 + (a^5 - 4\,a^3\,b + 3\,a\,b^2)\,n^7]\,;$$

$$y = 7\,m^6\,n + 21\,a\,m^5\,n^2 + 35\,(a^2 - b)\,m^4\,n^3 + 35\,(a^3 - 2\,a\,b)\,m^3\,n^4 + 21\,(a^4 - 3\,a^2\,b + b^2)\,m^2\,n^5 + 7\,(a^5 - 4\,a^3\,b + 3\,a\,b^2)\,m\,n^6 + (a^6 - 5\,a^4\,b + 6\,a^2\,b^2 - b^3)\,n^7.$$

$$k = 8\,; \quad x = m^8 - b\,[28\,m^6\,n^2 + 56\,a\,m^5\,n^3 + 70\,(a^2 - b)\,m^4\,n^4 + 56\,(a^3 - 2\,a\,b)\,m^3\,n^5 + 28\,(a^4 - 3\,a^2\,b + b^2)\,m^2\,n^6 + 8\,(a^5 - 4\,a^3\,b + 3\,a\,b^2)\,m\,n^7 + (a^6 - 5\,a^4\,b + 6\,a^2\,b^2 - b^3)\,n^8]\,;$$

$$y = 8\,m^7\,n + 28\,a\,m^6\,n^2 + 56\,(a^2 - b)\,m^5\,n^3 + 70\,(a^3 - 2\,a\,b)\,m^4\,n^4 + 56\,(a^4 - 3\,a^2\,b + b^2)\,m^3\,n^5 + 28\,(a^5 - 4\,a^3\,b + 3\,a\,b^2)\,m^2\,n^6 + 8\,(a^6 - 5\,a^4\,b + 6\,a^2\,b^2 - b^3)\,m\,n^7 + (a^7 - 6\,a^5\,b + 10\,a^3\,b^2 - 4\,a\,b^3)\,n^8.$$

$$k = 9\,; \quad x = m^9 - b\,[36\,m^7\,n^2 + 84\,a\,m^6\,n^3 + 126\,(a^2 - b)\,m^5\,n^4 + 126\,(a^3 - 2\,a\,b)\,m^4\,n^5 + 84\,(a^4 - 3\,a^2\,b + b^2)\,m^3\,n^6 + 36\,(a^5 - 4\,a^3\,b + 3\,a\,b^2)\,m^2\,n^7 + 9\,(a^6 - 5\,a^4\,b + 6\,a^2\,b^2 - b^3)\,m\,n^8 + (a^7 - 6\,a^5\,b + 10\,a^3\,b^2 - 4\,a\,b^3)\,n^9]\,;$$

$$y = 9\,m^8\,n + 36\,a\,m^7\,n^2 + 84\,(a^2 - b)\,m^6\,n^3 + 126\,(a^3 - 2\,a\,b)\,m^5\,n^4 + 126\,(a^4 - 3\,a^2\,b + b^2)\,m^4\,n^5 + 84\,(a^5 - 4\,a^3\,b + 3\,a\,b^2)\,m^3\,n^6 + 36\,(a^6 - 5\,a^4\,b + 6\,a^2\,b^2 - b^3)\,m^2\,n^7 + 9\,(a^7 - 6\,a^5\,b + 10\,a^3\,b^2 - 4\,a\,b^3)\,m\,n^8 + (a^8 - 7\,a^6\,b + 15\,a^4\,b^2 - 10\,a^2\,b^3 + b^4)\,n^9.$$

$$k = 10\,; \quad x = m^{10} - b\,[45\,m^8\,n^2 + 120\,a\,m^7\,n^3 + 210\,(a^2 - b)\,m^6\,n^4 + 252\,(a^3 - 2\,a\,b)\,m^5\,n^5 + 210\,(a^4 - 3\,a^2\,b + b^2)\,m^4\,n^6 + 120\,(a^5 - 4\,a^3\,b + 3\,a\,b^2)\,m^3\,n^7 + 45\,(a^6 - 5\,a^4\,b + 6\,a^2\,b^2 - b^3)\,m^2\,n^8 + 10\,(a^7 - 6\,a^5\,b + 10\,a^3\,b^2 - 4\,a\,b^3)\,m\,n^9 + (a^8 - 7\,a^6\,b + 15\,a^4\,b^2 - 10\,a^2\,b^3 + b^4)\,n^{10}]\,;$$

$$y = 10\,m^9\,n + 45\,a\,m^8\,n^2 + 120\,(a^2 - b)\,m^7\,n^3 + 210\,(a^3 - 2\,a\,b)\,m^6\,n^4 + 252\,(a^4 - 3\,a^2\,b + b^2)\,m^5\,n^5 + 210\,(a^5 - 4\,a^3\,b + 3\,a\,b^2)\,m^4\,n^6 + 120\,(a^6 - 5\,a^4\,b + 6\,a^2\,b^2 - b^3)\,m^3\,n^7 + 45\,(a^7 - 6\,a^5\,b + 10\,a^3\,b^2 - 4\,a\,b^3)\,m^2\,n^8 + 10\,(a^8 - 7\,a^6\,b + 15\,a^4\,b^2 - 10\,a^2\,b^3 + b^4)\,m\,n^9 + (a^9 - 8\,a^7\,b + 21\,a^5\,b^2 - 20\,a^3\,b^3 + 5\,a\,b^4)\,n^{10}.$$

D. *Exemples numériques.*

$a=-1 \quad b=2 \quad m=2 \quad n=1$

$$2^2-2\,.3+2.3^2=4^2$$
$$2^2+2\,.5+2.5^2=4^3$$
$$14^2+14\,.3+2.3^2=4^4$$
$$34^2-34\,.11+2.11^2=4^5$$
$$46^2-46\,.45+2.45^2=4^6$$
$$2^2-2\,.91+2.91^2=4^7$$
$$178^2+178\,.93+2.93^2=4^8$$
$$542^2-542\,.85+2.85^2=4^9$$
$$914^2-914\,.627+2.627^2=4^{10} \quad (=1.048.576).$$

O PROPRIETATE A SFEREI OSCULATOARE LA O CURBĂ STRÂMBĂ

de

C. BORS

(ASISTENT—IAŞI)

Proprietatea planului osculator al unei curbe strâmbe, de a înfăşura o suprafaţă a cărei muche cuspidală este curba dată, se extinde la sfera osculatoare:

Sfera, ai cărei coeficienţi sunt funcţiuni de un parametru, este osculatoare muchii cuspidale (înfăşurătoarea cercurilor caracteristice) a suprafeţei cerclate pe care o generează.

Fie familia de sfere

$$(\bar r-\bar r_0)^2=\varrho^2 \tag{1}$$

unde

$$\bar r_0=\bar r_0(\alpha) \quad \text{şi} \quad \varrho=\varrho(\alpha).$$

Ecuaţiile cercurilor caracteristice sunt:

$$\begin{cases}(\bar r-\bar r_0)^2=\varrho^2\\ -(\bar r-\bar r_0)\,\bar r_0'=\varrho\,\varrho'\end{cases} \tag{2}$$

Acestea fiind caracteristicile unei suprafeţe depinzând de un parametru, admit o curbă înfăşurătoare (muchea cuspidală a suprafeţei cerclate) căci sistemul de patru ecuaţii, format de ecuaţiile (2) şi derivatele lor, se reduc la un sistem de 3 ecuaţii:

$$\begin{cases}(\bar r-\bar r_0)^2=\varrho^2\\ -(\bar r-\bar r_0)\,\bar r_0'=\varrho\,\varrho'\\ \bar r_0'^2-(\bar r-\bar r_0)\,\bar r_0''=\varrho'^2+\varrho\,\varrho''\end{cases} \tag{3}$$

compatibil, care dă ecuaţiile muchii cuspidale

$$\bar r=\bar r(\alpha).$$

Demonstrez că sfera (1) este osculatoare muchii cuspidale (3) a suprafeţei cerclate, cu alte cuvinte că:

1°. Centrul ei este în planul normal la curba (3).

2°. Proecţia razei pe normala principală este $-R$ (R fiind raza de curbură).

3° Proecţia razei pe binormală este $T\frac{dR}{ds}$, adică raza sferei este

$$\varrho^2=R^2+\left(T\frac{dR}{ds}\right)^2.$$

1°. Derivez prima dintre relaţiile (3) luând ca parametru α arcul s al curbei (3)

$$(\bar r-\bar r_0)\,\bar r'-(\bar r-\bar r_0)\,\bar r_0'=\varrho\,\varrho'.$$

După a doua ecuaţie din (3) rezultă:

$$(\bar r-\bar r_0)\,\bar r'=0 \tag{4}$$

fiind vectorul punctului curent de curbă, această relaţie se poate scrie

$$(\bar r-\bar r_0)\,\bar\tau=0; \tag{4'}$$

$\bar\tau$ vectorul unitar al tangentei, ceeace înseamnă că vectorul $\bar r-\bar r_0$ este conţinut în planul normal. Deci centrul sferei (1) este în planul normal la curba (3).

2°. Derivez a doua dintre relaţiile (3) în raport cu s

$$-\bar r'\,\bar r_0'+\bar r_0'^2-(\bar r-\bar r_0)\,\bar r_0''=\varrho'^2+\varrho\,\varrho''$$

după ultima

$$-\bar r'\,\bar r_0'=0 \quad \text{sau} \quad -\bar r'\,\dot{\bar r}_0\,s_1'=0$$

$$\text{unde} \quad \dot{\bar r}=\frac{d\bar r_0}{ds_1} \tag{5}$$

(s_1 fiind arcul curbei centrului sferei (1))

adică $\bar\tau_0$ (vectorul tangent la curba descrisă de centrul sferei) este conţinut în planul normal la curba (3).

Derivând (4) în raport cu s

$$\bar{r}'^2 - \bar{r}'\,\bar{\tau}_0\,s_1' + (\bar{r} - \bar{r}_0)\,\bar{r}'' = 0$$

după (5)

$$\bar{r}'^2 + (\bar{r} - \bar{r}_0)\,\bar{r}'' = 0$$

pentru punctul considerat al curbei, folosind formulele lui *Frenet*

$$(6) \qquad (\bar{r} - \bar{r}_0)\,\bar{\nu} = -\mathrm{R}.$$

$\bar{\nu}$ fiind vectorul unitar al normalei principale la curba (3). Deci proecţia razei sferei (1) pe normala principală este egală, în valoarea absolută, cu raza de curbură în punctul considerat.

3°. Pentru ca să arăt că proecţia lui $\bar{r} - \bar{r}_0$ pe binormală este $\mathrm{T}\,\frac{d\,\mathrm{R}}{d\,s}$ (T torsiunea curbei), demonstrez lema.

Planul uormal la curbă în punctul considerat coincide cu planul osculator la curba descrisă de centrul sferei (1) *care are proprietăţile* 1°. *şi* 2°.

In adevăr din relaţia (5) am văzut că planul normal conţine vectorul tangent la curba centrului sferei (1). Dar $\bar{\tau}_0$ este conţinut în planul osculator la curba centrului sferei. Arăt acelaş lucru şi pentru vectorul unitar al normalei principale la curba descrisă de centrul sferei.

Ecuaţia planului normal

$$(\bar{r} - \bar{r}_0)\,\bar{\tau} = 0$$

acest plan depinzând de un parametru va admite ca înfăşurătoare o suprafaţă desfăşurabilă, locul caracteristicei planului normal (dreapta polară):

$$(7) \qquad \begin{aligned} &(\bar{r} - \bar{r}_0)\,\bar{\tau} = 0 \\ &-\dot{\bar{r}}_0\,\bar{\tau} = 0 \end{aligned}$$

(notând cu puncte derivatele în raport cu s_1) a cărei muche cuspidală este

$$(8) \qquad \begin{cases} (\bar{r} - \bar{r}_0)\,\bar{\tau} = 0 \\ (-\dot{\bar{r}}\,\bar{\tau} = 0 \\ -\ddot{\bar{r}}\,\bar{\tau} = 0 \end{cases}$$

ultimile două relaţii se pot scrie

$$\bar{\tau} = \lambda\,[\dot{\bar{r}}_0\,\ddot{\bar{r}}_0] = \frac{\lambda}{\mathrm{R}_0}\,[\bar{\tau}_0\,\bar{\nu}]$$

λ o constantă. Planul osculator la curba centrului sferei (1) este deci perpendicular pe $\bar{\tau}$ (paralel cu planul normal) deci va coincide cu el. Cu ajutorul acestei leme demonstrez 3°.

Derivez (6) în raport cu s şi aplic formulele lui *Frenet*:

$$(9) \qquad \bar{\tau}\,\bar{\nu} - \bar{\tau}_0\,\bar{\nu}\,s_1' + (\bar{r} - \bar{r}_0)\left(-\frac{\bar{\tau}}{\mathrm{R}} - \frac{\bar{\beta}}{\mathrm{T}}\right) = -\frac{d\,\mathrm{R}}{d\,s}.$$

Din a doua relaţie (8) am derivând în raport cu s

$$-\ddot{\bar{r}}_0\,\bar{\tau}\,s_1' - \dot{\bar{r}}_0\,\frac{\bar{\nu}}{\mathrm{R}} = 0$$

după ultima

$$-\dot{\bar{r}}_0\,\frac{\bar{\nu}}{\mathrm{R}} = 0 \quad \text{sau} \quad \bar{\tau}_0\,\bar{\nu} = 0.$$

Relaţia (9) devine

$$(\bar{r} - \bar{r}_0)\,\bar{\beta} = \mathrm{T}\,\frac{d\,\mathrm{R}}{d\,s}.$$

Deci sfera $(\bar{r} - \bar{r}_0) = \varrho^2$ este osculatoare curbei (3).

Consecinţe.

a. Lema precedentă se poate enunţa acum:

Planul normal într'un punct al unei curbe strâmbe coincide cu planul osculator în punctul corespunzător la curba descrisă de centrul de curbură.

b. Curba descrisă de centrul de curbură este muchia cuspidală a desfăşurabilei planului normal la curba dată, adică este înfăşurătoarea dreptelor polare.

NOTE MATEMATICE

17. — *Soluţia problemei 1708.*

Să se determine trei numere întregi x, y, z *astfel ca*

$$x + y + z = u^2$$
$$y^2 + y^2 + z^2 = v^2.$$

A. GLODEN

I. O soluţie este dată, când punem:

$$x = 2\,(a^2 - b^2)^2$$
$$y = 2\,(a^2 - b^2)\,(b^2 + 2\,a\,b - a^2)$$
$$z = (b^2 + 2\,a\,b - a^2)^2$$
$$u = a^2 + b^2$$
$$v = 2\,(a^2 - b^2)^2 + (b + 2\,a\,b - a^2)^2.$$

BIBLIOTECA „ASTRA" SIBIU

1°. Exemplu: $a=3,\ b=2$ dă

$$50+70+49=13^2$$
$$50^2+70^2+49^2=99^2.$$

2°. Alt exemplu:

$$1+18+30=6+10+33=7^2$$
$$1^2+18^2+30^2=6^2+10^2+33^2=35^2.$$

Problema d-lui *Gloden* este deci un caz special al sistemului

$$x_1+y_1+z_1=x_2+y_2+z_2=\cdots=x_r+y_r+z_r=u^2$$
$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2=\cdots=x_r^2+y_r^2+z_r^2=v^2,$$

pentru un r oarecare.

II. Din soluţiile găsite sub I. rezultă soluţii pentru

$$A^2+B^2+C^2+2(AB+AC+BC)=u^4$$
$$A^4+B^4+C^4+2(A^2B^2+A^2C^2+B^2C^2)=v^4,$$

când se ridică ecuaţiile la patrat.

Exemplu:

$$50^2+70^2+49^2+2(3500+2450+3430)=13^4$$
$$50^4+70^4+49^4+2(3500^2+2450^2+3430^2)=99^4.$$

Şi în această direcţiune problema se poate generaliza.

III. Avem un caz special, când $u=v$. Alegem un v oarecare şi punem $0+0+v^2=x+y+z$. La determinarea numerilor x,y,z utilizăm formulele d-lor *Alaci* şi *Ghermănescu* din R. M. T., August 1938. Punem

$$\alpha=\frac{k^2-1}{k^2+3},\qquad \beta=\frac{-2k+2}{k^2+3},$$
$$\gamma=\frac{2k+2}{k^2+3},\qquad (\textit{Alaci}, \text{ pag. } 64),$$

pentru un k oarecare.

$$\alpha=\frac{\lambda^2+\lambda}{\lambda^2+\lambda+1},\qquad \beta=\frac{-\lambda}{\lambda^2+\lambda+1},$$
$$\gamma=\frac{\lambda+1}{\lambda^2+\lambda+1},\qquad (\textit{Alaci}, \text{ pag. } 67),$$

pentru un γ oarecare. Folosim acum formulele d-lui *Ghermănescu* (pag. 64), la care observăm, că în cazul nostru $a=b=c=0$:

$$\begin{cases} x=\alpha.0+\beta.0+\gamma.v \\ y=\gamma.0+\alpha.0+\beta.v \\ z=\beta.0+\gamma.0+\alpha.v. \end{cases}$$

Cu aceasta ajungem la relaţiunea generală:

$$v=u=(-d)+(d+1)+(d^2+d)=(d^2+d+1)$$
$$v^2=u^2=(-d)^2+(d+1)^2+(d^2+d)^2=(d^2+d+1)^2,$$

pentru un d oarecare.

Exemplul, $d=5$ dă:

$$\begin{cases} (-5)+6+30=31 \\ (-5)^2+6^2+30^2=31^2. \end{cases}$$

Cazul special tratat aci se poate generaliza în direcţiuni diferite.

In general se poate soluţiona sistemul,

$$F_1+G_1+H_1=F_2+G_2+H_2=\cdots$$
$$\cdots=F_r+G_r+H_r=v^{1+n}$$
$$F_1^2+G_1^2+H_1^2=F_2^2+G_2^2+H_2^2=\cdots$$
$$\cdots=F_r^2+G_r^2+H_r^2=v^{2+n},$$

pentru un r şi n oarecare.

Exemplu: $r=n=1$ ne dă din exemplul anterior rezultatul:

$$(-155)+186+930=31^2$$
$$(-155)^2+186^2+930^2=31^4.$$

IV. Obţinem un alt caz special, când $y=z$ şi $u\neq v$. Anume, pentru un v oarecare este valabilă relaţiunea:

$$\begin{cases} v^2=\left(-\frac{v^2}{3}\right)+\left(\frac{2v^2}{3}\right)+\left(\frac{2v^2}{3}\right), \\ \text{sau:} \\ u^2=\left(-\frac{v^2}{3}\right)^2+\left(\frac{2v^2}{3}\right)^2+\left(\frac{2v^2}{3}\right)^2, \quad \text{dacă } u^2=v^4. \end{cases}$$

Această relaţiune este întotdeauna valabilă în numere întregi, când v este divizibil prin 3.

Şi acest caz special se poate generaliza în diferite direcţiuni.

ALFRED MOESSNER
(Nürnberg)

---

18. — *Asupra problemei* 1569.

Interesanta relaţie metrică, dată de d-l Prof. *V. Alaci* în problema 1569, se poate enunţa şi

transforma în felul următor într'o relaţie de suprafeţe.

In triunghiul B A C *dreptunghic în* A *se duce înălţimea* A D *şi se notează cu* I, I_1, I_2 *centrele cercurilor înscrise în triunghiurile* B A C, B D A, C D A. Avem:

$$\text{Supr. } B\,I\,C = \text{Supr. } B\,I_1\,A + \text{Supr. } C\,I_2\,A.$$

Demonstraţia e identică cu cea dată la pag. 91 pentru problema 1569.

G-L GH. BUICLIU

---

19. — *Numere interesante cu 10 cifre diferite.* La soluţiunile problemei 3033 din *Mathesis*, date de d-l G-l *Gh. Buicliu* în nota dela pag. 51 *R. M. T.*, mai trebuiesc adăugate următoarele soluţiuni:

La grupa I:

$$7 \times 586 = 14 \times 293$$

$$29 \times 146 = 58 \times 73.$$

La grupa II:

$$3 \times 5649 = 21 \times 807$$

$$3 \times 5481 = 27 \times 609$$

$$7 \times 5621 = 49 \times 803$$

$$45 \times 762 = 90 \times 381.$$

Din soluţiunile date în nota citată trebuie radiate următoarele două, care nu sunt adevărate

$7 \times 4160 = 35 \times 892$ şi $35 \times 892 = 70 \times 416$.

ST. CETATEANU

CHESTIUNI DE EXAMEN ŞCOALA POLITECHNICA DIN TIMIŞOARA.

Luni, 17 Octomvrie 1938.

Lucrare scrisă la „GEOMETRIE".

I.

Fiind date două cercuri exterioare O şi O′ de raze R şi R′ şi având distanţa centrelor O O′ egală cu d; din centrul O să se construiască tangentele O A′ şi O B′ la cercul O′ şi din centrul O′ tangentele O′ A şi O′ B la cercul O. Cele patru tangente determină patru puncte: M (O′ A, O A′); M′ (O B′, O′ B); M_1 (O A′, B O′); M_1' (O B′, O′ A).

Să se arate:

1°. Că dreptele O A, O′ A′ se întâlnesc în L pe M M′; Asemenea O B şi O′ B′ se întâlnesc în L′ pe M M′;

2°. Că dreptele O B, O′ A′ se întâlnesc în L_1' pe $M_1 M_1'$; asemenea O A, O′ B′ se întâlnesc în L_1 pe M_1 M_1'.

3°. Se se calculeze *perimetrul* şi *aria* patrulaterului O M O′ M′.

4°. Să se calculeze aria trapezului M M_1 M_1' M′

5°. Să se calculeze lungimea segmentului L L′.

II.

Se dă o piramidă exagonală regulată circumscrisă unui con circular, cu raza bazei R, şi aria secţiunii făcută în această piramidă la distauţa R de vârf egal cu $\frac{3R^2}{2}$.

1°. Să se calculeze volumul şi suprafaţa laterală a conului dat.

2°. Să se găsească, sub formă generală, o limită a erorei ce facem când luăm în locul volumului conului pe acela al piramidei circumscrise sau acela al piramidei înscrise corespunzătoare.

(Timp acordat 3 ore).

Lucrare scrisă la „ALGEBRĂ şi TRIGONOMETRIE"

I.

1. Să se determine a şi b, astfel încât funcţiunea

$$f(x) = 16x^4 + ax^3 + bx^2 - 48x + 9$$

să fie maximă sau minimă pentru

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{şi} \quad x = \frac{3}{2}.$$

Să se precizeze, ce anume, (maxim sau minim) pentru fiecare caz găsindu-se valoarea corespunzătoare pentru $f(x)$.

2. Să se deducă de aci rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$.

3. Să se determine şi cea de a treia rădăcină a ecuaţiei derivată $f'(x) = 0$ şi să arate ce îi corespunde pentru funcţiunea $f(x)$.

4. Să se rezolve din nou ecuaţia $f(x) = 0$ cu a şi b nedeterminaţi, cu ajutorul relaţiilor între rădăcini şi coeficienţi, în ipoteza că are două rădăcini duble.

5. Să se studieze variaţia funcţiunii $y = f(x)$, unde s'au înlocuit a şi b prin valorile aflate şi să se cerceteze dacă curba reprezentativă are o axă de simetrie paralelă la O y, care să se determine.

II.

In triunghiul B A C cunoaştem laturile $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$ şi unghiul cuprins între ele B A C. Prin vârful A trec două drepte A D şi A E care împart unghiul A în trei părţi egale şi întâlnesc latura opusă B C respectiv în punctele D şi E. Să se calculeze:

1°. Lungimile segmentelor $\overline{AD}$ şi $\overline{AE}$.

2°. Lungimile segmentelor $\overline{BD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EC}$.

3°. In ce caz segmentele $\overline{AD}$ şi $\overline{AE}$ pot fi egale?

4°. Există vre'un triunghiu A B C astfel ca să avem:

$$\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}?$$

5°. *Aplicaţie* $b = 64$ cm; $c = 46$ cm; $A = 48° 18' 30''$.

Marţi, 18 Octomvrie 1938.

Lucrare scrisă la „ARITMETICA".

1. O sumă de bani, dată la dobândă simplă, devine în doi ani şi trei luni 11.350 lei. Aceiaş sumă, dată cu acelaş procent, devine în 3 ani şi 4 luni 12.000 lei

Care a fost suma iniţială şi cu ce procent a fost împrumutată.

2. Dacă n este un număr întreg, să se arate că produsul

$$P = n(n^2 - 1)(n^2 - 2)(n^2 - 4)$$

este divizibil prin produsul 2, 3, 3, 5, 7.

3. Dacă două numere A şi B sunt prime între ele, suma şi diferenţa lor $A + B$, $A - B$, nu pot avea ca divizor comun decât cel mult pe 2.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLIV, No. 2, Octomvrie 1938. *Petru Pipoş* (1859–1913), (urmare şi sfârşit) de *Victor Marian*. Configuraţia numerilor prime, de *G. Zapan*. Asupra reprezentării analitice a ariilor şi liniilor poligonale, de *N. O. Zaharia*. Asupra contactului conicelor, de Cpt. *Mihail I. Focşeneanu*. Programa analitică hotărâtă pentru Concursul „Gazetei Matematice" din anul 1939. Note, Probleme rezolvate şi propuse.

2. *Boletin Matematico*, anul XI, No. 14, Septemvrie 1938, *Buenos-Aires*. Proprietăţile numerilor triunghiulare, de *A. Giloden*. Cu privire la ecuaţia $y^3 = ax^2 + b$, de *A. Gloden*. Rezolvirea ecuaţiei: $x^3 + y^3 = z^2 t^2$, de *A. Gloden*. Observare asupra relaţiei: $H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 = K_1^n + K_2^n + K_3^n$, de *A. Moessner*. Produsul segmentelor unei secante, de B. I. B.

3. *Ştiinţă şi Progres*, Revista ştiinţifică a liceelor militare, anul V, N-rile 1–2, Septemvrie–Octomvrie 1938. † Mareşalul *Averescu*... şi Progres, de Cpt, *A. Ionescu-Pelikan*. Electrobiogeneza, de Prof. *Ioan Ciobanu*. Stelele duble, de *A. E. Casimir*. Asupra structurii materiei şi luminii, de Prof. *Ion Lungu*. Săpăturile arheologice dela *Barbosi*, de Elev *Cristescu C. Ionel*. Insemnări, de Prof. *G. Janet*. Probleme rezolvate şi propuse.

4. *A. G. Ioachimescu*. Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Această interesantă Culegere, revăzută de d-nii profesori *N. O. Ţino* şi *C. Ionescu-Bujor*, nu trebue să lipsească din biblioteca corespondenţilor noştrii, după cum ea a fost nelipsită şi călăuzitoare pentru generaţiile mai vechi de corespondenţi ai Gazetei Matematice.

5. *P. Andronescu*. Die Mindestzahl der bei Untersuchung der elektrostatischen, magnetostatischen und elektromagnetischen Erscheinungen erforderlichen willkürlichen Einheiten. (Sonder-Abdruck aus dem Bulletin des Sev, Jahrgang 1938, No. 12).

6. *V. Thébault*. Notes de Géométrie. (Extrait de Mathesis, 1938).

7. *Locot. Zamfirescu Ioan*. Asupra autofretajului. Teoria şi calculul autofretajului fără tracţiune longitudinală. (218 pagini), Extras din Revista Artileriei 1937-38).

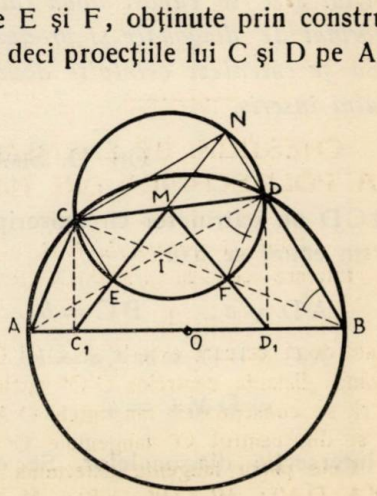
PROBLEME REZOLVATE

1009. — *Se dă cercul* O, *diametrul* A B *şi coarda* C D. *Fie* $C_1 D_1$ *proecţia lui* C D *pe* A B *şi* M *mijlocul coardei* C D. *Dreapta* $M C_1$ *taie diagonala* A D *în* E *şi* $M D_1$ *pe* C B *în* F. *Să se demonstreze că patrulaterul* C D E F *este asemenea cu patrulaterul* A B C D.

LOCOT. I. GH. ZAMFIRESCU

Soluţia I. Fie N proecţia lui C pe B D. Dreapta $C_1 N$ este deci dreapta lui *Simson* a punctului C de pe cercul O faţă de triunghiul A B D. Dacă E′ ar fi proecţia lui C pe A D, atunci $C_1 N$ trece prin E′ şi cum E′ C N D este un dreptunghiu, diagonalele E′ N, C D se întâlnesc în mijlocul M al lui C D, aceasta înseamnă că dreapta $C_1 M$ este dreapta lui *Simson* a punctului C faţă de triunghiul A B D şi deci E′ se confundă cu E.

Punctele E şi F, obţinute prin construcţiile din enunţ sunt deci proecţiile lui C şi D pe A D şi C B.



Se observă acum din triunghiurile dreptunghice

IFD şi IDB că unghiurile IDF şi IBD sunt egale ca suplimente ale unghiului DIF. Apoi în patrulaterul inscriptibil ABDC unghiurile CDA şi CBA sunt egale. Se deduce

$$\sphericalangle CDF = \sphericalangle ABD,$$

ceia ce demonstrează proprietatea din enunţ, căci egalitatea celorlalte unghiuri a patrulaterelor ABDC şi CEFD se dovedeşte la fel.

Au dat soluţii analoage, sau prin relaţii de unghiuri d-nii: *Boerescu P. G.* (lic. Oltenita), *Boeriu V.* (Şc. Politechnică, Timişoara), *Coşniţă C.* (Bârlad), *Damian I. I.* (lic. Caracal), *Ivănescu C.* (lic. Bârlad), *Mecu I. I.*, *Mecu M.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Păsculescu V.*, (Şc. Milit. de Geniu), *Pop L.* (Şc. Politechnică, Timişoara), *Ştefănescu Anibal* (bacalaureat, Bucureşti), şi *Süli M.* (Şc. Politechnică, Timişoara).

Soluţia II-a. Conform proprietăţilor demonstrate de d-l S-Lt *I. Gh. Zamfirescu* în articolul publicat la pag. 3, Vol. XII., R. M. T., rezultă că punctul M este anticentrul patrulaterului ABCD, deci în el concură dreptele lui *Simson* ale fiecăruia din vârfurile patrulaterului în raport cu triunghiurile formate prin unirea celorlalte vârfuri.

A dat soluţia II-a d-l *Lăţea P. C.* (Şc. de Ofiţeri, Timişoara).

D-l *N. N. Mihăileanu* (Constanţa) a dat în Iulie 1931, o soluţie pe cale trigonometrică.

1263. — *Intr'un patrulater ce se poate circumscrie unui cerc se cunosc două laturi opuse, unghiul format de diagonale şi produsul diagonalelor. Să se calculeze celelalte două laturi şi raza cercului înscris.*

GH D. SIMIONESCU

Fie ABCD un patrulater circumscriptibil unui cerc O. Prin enunţ se dau

$$AD = a; \qquad BC = b$$

$$AC \times BD = m \times n = k$$

$$\sphericalangle DMC = \varphi$$

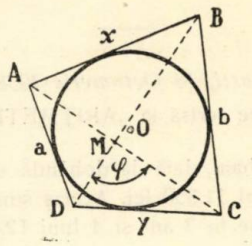
M fiind intersecţia diagonalelor. Se cere să se calculeze

$$AB = x, \qquad DC = y$$

şi raza R a cercului O, în funcţie de elementele date.

Patrulaterul fiind circumscriptibil avem

$$(1) \qquad a + b = x + y.$$



Ridicând la patrat şi înlocuind

$$a^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MD}^2 + 2\,\overline{MA}\cdot\overline{MD}\cos\varphi$$

$$b^2 = \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 + 2\,\overline{MB}\cdot\overline{MC}\cos\varphi$$

$$x^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 - 2\,\overline{MA}\cdot\overline{MB}\cos\varphi$$

$$y^2 = \overline{MC}^2 + \overline{MD}^2 - 2\,\overline{MC}\cdot\overline{MD}\cos\varphi$$

se obţine

$$xy - ab = (\overline{MA}\cdot\overline{MD} + \overline{MB}\cdot\overline{MC} + \overline{MA}\cdot\overline{MB} + \overline{MC}\cdot\overline{MD})\cos\varphi,$$

care după efectuarea calculelor din paranteză devine

$$(2) \qquad xy - ab = mn\cos\varphi,$$

o relaţie analoagă cu acea a lui *Ptolomeu* pentru patrulatere inscriptibile.

Rezolvind sistemul (1), (2) în x, y se găseşte

$$x, y = \frac{a + b \pm \sqrt{(a-b)^2 - 4mn\cos\varphi}}{2}.$$

Când φ este ascuţit, condiţia de realitate a lui x şi y este

$$(a-b)^2 \geqq 4k\cos\varphi.$$

Fie S suprafaţa patrulaterului. Se ştie că

$$2S = R(a+b+x+y) = mn\sin\varphi + k\sin\varphi$$

de unde ţinând seamă de (1)

$$R = \frac{k\sin\varphi}{2(a+b)}.$$

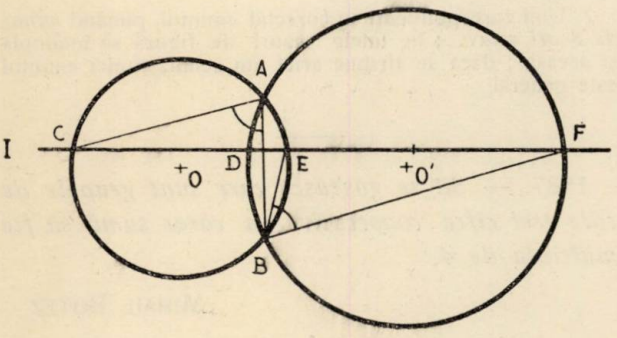
Au rezolvat problema pe căi analoage, dând rezultatele exact d-nii: *M. F. Amărăşteanu* (Craiova), *T. Amăricăi* (lic. Milit., Cernăuţi), *R. Apostol* (lic. Milit., N. Filipescu), *C. Căşveanu* (lic. Milit., Cernăuţi), *P. V. Cazanacli* (Iaşi),

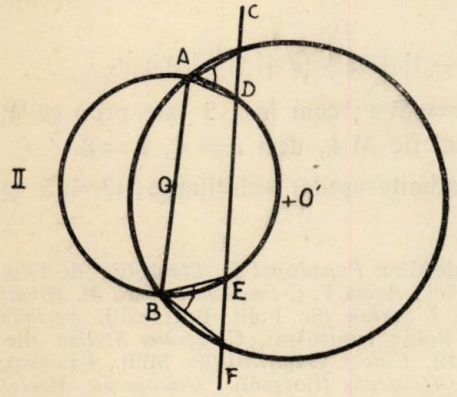
M. L. Negrea (Brăila), *C. D. Nicoară*, *Vlad Gh. Popescu* (lic. Milit., Cernăuţi), *M. C. Postelnicescu* (lic. Milit, N. Filipescu), *R. Gh. Ţighiliu*, *N. Trăsnitu*, *Ap. Valerian N. Vasilescu*, *C. A. Vasiliu*, *M. I. Vasiliu* (lic. Militar, Cernăuţi).

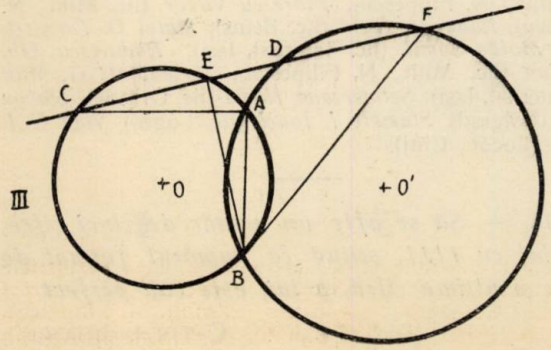
1266. — *Se dau două cercuri* O *şi* O′ *care se taie în* A *şi* B. *Dacă o secantă oarecare taie cercurile la rând în* C, D, E *şi* F, *să se dovedească că avem*

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle EBF.$$

GH. VASILIU







Se urmăreşte uşor pe o figură, relaţiile unghiulare succesive

$$\overset{\frown}{CAD} = \overset{\frown}{ADF} - \overset{\frown}{ACE} = \overset{\frown}{ABF} - \overset{\frown}{ABE} = \overset{\frown}{EBF}$$

observând că primul unghiu este exterior şi pentru următoarele: ca unghiuri ce subîntind în acelaş cerc arce egale.

Soluţii date de d-nii *Apostol Radu* (lic. Milit., M-rea Dealu). *Boiangiu I. Gh.* (lic. Milit., M-rea Dealu), *Bucur D. Virgil*, *Budeanu Constantin* (Şc. Polit., Bucureşti), *Caraman A.* (lic. Milit, Iaşi), *Cazanacli P.* (Iaşi), *Dăscălescu V. Constantin* (lic. Milit., Iaşi), *Enăsescu D. D.* (lic. Milit., Iaşi), *Florescu L. Victor* (lic. Milit, M-rea Dealu), *Mecu P. Mihail* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Mihalcea I. Octavian* (Buzău), *Popa D. Traian* (lic. Giurgiu), *Postelnicescu Mircea* (lic. Milit, M-rea Dealu), *Racoţeanu Constantin* (lic. Milit., Craiova), *Şabac Gh. Ion* (lic. Milit, M-rea Dealu), *Sâmbotin Gh* (Sub-Lt), plus 2 soluţii identice dela lic. Beiuş şi încă 30 (!) identice dela lic. Milit, Cernăuţi.

Notă. 1. Autorul problemei sesizează şi cazul II. de figură; atunci propoziţia încă rămâne valabilă şi demonstraţia este foarte puţin diferită de cea mai de sus:

$$\overset{\frown}{CAD} = \overset{\frown}{ADE} - \overset{\frown}{ACF} = \text{supl.}\overset{\frown}{ABE} - \text{supl.}\overset{\frown}{ABF} =$$

$$\overset{\frown}{ABF} - \overset{\frown}{ABE} = \overset{\frown}{EBF}.$$

2. In cazul III. de figură însă, D-l *Şabac Gh. I.* menţionează că relaţia nu e justă, ea poate fi însă uşor corectată schimbând literele E şi D între ele. Avem atunci

$$\overset{\frown}{CAD} = \overset{\frown}{ADF} - \overset{\frown}{ACE} = \text{supl.}\overset{\frown}{ABF} - \overset{\frown}{ABE} =$$

$$\text{supl.}\,(\overset{\frown}{ABF} + \overset{\frown}{ABE}) = \text{supl.}\overset{\frown}{EBF}$$

unghiurile problemei sunt în acest caz suplimentare.

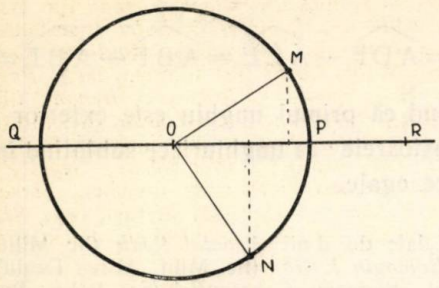
Propoziţia foarte frumoasă a D-lui *Gh. Vasiliu* este deci valabilă în toate cazurile de figură.

N. M.

1435. — *In cercul de centru* O, *fie* PQ *un diametru şi* OM, ON *două raze perpendiculare, iar* R *un punct oarecare pe* PQ. *Suma ariilor patratelor construite pe* RP *şi* RQ, *face cât dublul ariei patratului construit pe* RM *adunat cu de opt ori aria triunghiului* ONR *sau cu de două ori aria patratului construit pe* RN *adunat cu de opt ori aria triunghiului* OMR.

N. N. MIHAILEANU

1. După o relaţie metrică (*Pitagora*, generalizată), avem în triunghiul O M R



$$\overline{MR}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{OR}^2 - 2 \cdot \overline{OR} \cdot \overline{OL}$$

L şi K fiind proiecţiile punctelor M şi N pe P Q; sau

$$\overline{MR}^2 + 2 \cdot \overline{OR} \cdot \overline{OL} = \overline{OM}^2 + \overline{OR}^2$$

adunând $2 \cdot \overline{OR} \cdot \overline{OL}$ şi apoi scăzând, avem,

$$\overline{MR}^2 + 2 \cdot \overline{OR}(\overline{OL} + \overline{OM}) = (\overline{OR} + \overline{OM})^2 = \overline{RQ}^2$$

$$\overline{MR}^2 + 2 \cdot \overline{OR}(\overline{OL} - \overline{OM}) = (\overline{OR} - \overline{OM})^2 = \overline{RP}^2$$

căci $\overline{OM} = \overline{OQ}$; adunând aceste relaţii, una cu alta, obţinem,

$$2 \cdot \overline{MR}^2 + 4 \cdot \overline{OR} \cdot \overline{OL} = \overline{RP}^2 + \overline{RQ}^2$$

ceeace trebuia demonstrat, căci $\overline{OL} = \overline{NK}$.

Analog, vom avea şi

$$2 \cdot \overline{NR}^2 + 4 \cdot \overline{OR} \cdot (\overline{OK} = \overline{ML}) = \overline{RP}^2 + \overline{RQ}^2.$$

2. *Soluţie analitică.* Fie axa $O\,x$ pe diametrul P Q, avem

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

ecuaţia cercului şi punctele $R(r, 0)$; $M(m, m')$; $N(n, n')$; M şi N fiind pe cerc şi pe raze perpendiculare, verifică relaţiile

$$m^2 + m'^2 = a^2, \quad n^2 + n'^2 = a^2; \quad n = m', \quad n' = m.$$

Avem atunci

$$\overline{RP}^2 + \overline{RQ}^2 = (r - a_i)^2 + (r + a_i)^2 = 2(a^2 + r^2).$$

Pe de altă parte

$$2\,\overline{RM}^2 + 8 \text{ aria } O\,N\,R = 2[(r-m)^2 + m'^2] + 4\,r\,n' =$$
$$2r^2 + 2(m^2 + m'^2) - 4\,r(m - n') = 2r^2 + 2a^2 = 2(a^2 + r^2).$$

$$2\,\overline{RN}^2 + 8 \text{ aria } O\,M\,R = 2[(r - n)^2 + n'^2] +$$
$$4\,r\,m' = 2r^2 + 2(n^2 + n'^2) - 4\,r(n - m') =$$
$$2r^2 + 2a^2 = 2(a^2 + r^2).$$

Soluţie geometrică dată de d-nii: *Petre V. Cazanacli* (Chişinău) şi *Victor L. Florescu* (lic. Milit., M-rea Dealu).

Soluţie trigonometrică dată de d-l *Mircea Leonte A. Negrea* (Brăila) şi *soluţie* prin *geometria analitică* dela d-nii *Gavril I. Popoviciu* (Urziceni) şi *Pompeiu Marica* (Beiuş).

Notă. 1. Ţinând seama de structura însăş a configuraţiei, că punctele M şi N sunt egal favorizate, *rezultând din construcţii reciproce* (perpendicularitatea: dacă O M ⊥ O N şi O N ⊥ O M), se vede că orice relaţie pentru punctul M va avea o analoagă pentru N; elementele relaţiei independente de M, N deci cele care antrenează punctele O, P, Q, R vor fi invariante.

Acest principiu al analogiei, că *în construcţii analoage vom avea relaţii analoage* cu tot enunţul lui evident, are totuş importanţa lui Dacă ar fi fost respectat în cazul de faţă, corespondenţii noştrii şi-ar fi dat seama că a doua parte a soluţiei e inutilă şi n'ar fi dat soluţii de două ori mai lungi. Cuvântul *analog* înlocueşte repetarea demonstraţiei.

2 Unii corespondenţi au corectat enunţul, punând *minus de 8 ori aria*...; în unele cazuri de figură se întâmplă şi aceasta; dacă se atribue ariei un semn, atunci enunţul este general.

1587. — *Să se găsească care sunt grupele de câte trei cifre consecutive, a căror sumă să fie multiplu de 4.*

MIHAIL BOTEZ

Insemnăm cu $a - 1$, a, $a + 1$ cele trei cifre consecutive, $9 \geqq a \geqq 1$. Conform enunţului trebue să avem:

$$(a - 1) + a + (a + 1) = \text{M } 4,$$

sau încă: $3\,a = \text{M } 4$; cum însă 3 este prim cu 4, trebue ca a să fie M 4, deci $a = 4$, $a = 8$.

Problema admite aşadar soluţiunile: (3, 4, 5) şi (7, 8, 9).

Soluţii date de d-ra *Papadopol D. Elena* (lic. de Fete Bacău) şi de d-nii: *Aman V. C-tin, Anastasescu M. Mihail* (Ploeşti), *Begu I. Ştefan* (Şc. Polit., Bucureşti), *Berinde L. Titus*, (Şc. Polit., Timişoara), *Cetăţeanu Stelian* (lic. Sincai, Bucureşti), *Cioc I. Dumitru* (lic. Milit., Craiova), *Dăscălescu St. Hristache* (Focşani), *Diaconescu Marcel* (lic. Milit., N. Filipescu), *Florescu Victor* (lic. Milit, N. Filipescu), *Jidanu I. C-tin* (lic. Beiuş), *Matei D. Dumitru* (Iaşi), *Motăş Camil* (lic. Internat, Iaşi), *Rădulescu Gh. Octavian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Rosenblatt G. Milu* (lic. Internat, Iaşi), *Şelmereanu Horia* (lic. Orăştie), *Slavov Iacob* (Bolgrad) *Stamate I. Ionel* (lic. Lugoj) *Vlad C. I. Mihail* (Locot, Cluj).

1603. — *Să se afle un număr de cinci cifre, divizibil cu 1111, ştiind că numărul format de prima şi ultima cifră, a lui, este cub perfect.*

C-TIN I JIDANU

Observăm că, dacă însemnăm cu P numărul cerut de cinci cifre şi cu N câtul său prin 1111, trebue să avem:

$$(1) \qquad 10^4 \leqq 1111 \times N < 10^5$$

de unde deducem că:

$$(2) \qquad 10 \leqq N \leqq 90.$$

De altă parte, având $1111 = 11 \times 101$ şi însemnând pe a şi b respectiv cifra zecilor şi a unităţilor lui N, vom avea:

$$(3) \qquad P = a\,b\,a\,b \times 11.$$

Dacă presupunem că $a + b \leqq 9$, rezultă că ultima şi prima cifră a lui P sunt respectiv b şi a, deci N trebue să fie un cub de două cifre şi astfel ca suma cifrelor sale să fie cel mult 9. Singurul cub care satisface acestor condiţiuni este $N = 27$; deci $P \equiv 29997$.

Dacă $a + b = 10 + c$ (c fiind evident $\leqq 8$), atunci ultima şi prima cifră a numărului P sunt respectiv b şi $a + 1$, deci trebue ca $N' \equiv (a+1)\,b$ să fie cub perfect astfel ca $a + b > 9$. Singurul cub 64, nu satisface condiţiunii $a + b > 9$, deci nu avem în acest caz o soluţiune pentru P.

Aşadar, problema admite o singură soluţiune:

$$P = 29997.$$

Soluţii date de d-nii: *Anastasiu M. Mihail* (lic. Milit., N. Filipescu), *Andrievici N.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Bega I Ştefan* (Şc. Polit, Bucureşti), *Berinde Titus* (Şc. Polit, Timişoara), *Brădeanu Nicolae* (lic. Beiuş), *Buznea D. Dinu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Cristescu Dan* (lic. Braşov), *Czirjak L.* (Bistriţa), *Dăscălescu Şt. Hristache* (Focşani), *Diaconescu D. Ioan* (lic. T-Severin), *Diaconescu Marcel* (lic. Milit., N. Filipescu), *Gligor N. Ioan* (lic. Arad), *Lupescu Corneliu* (S-Lt), *Matei D. D-tru* (bacalaureat, Iaşi), *Modâlca S. Emil* (lic. T-Severin), *Moldovan Cornel* (lic. Tg Mureş), *Motăş Camil* (lic. Internat, Iaşi), *Petrescu C. Alin* (lic. N. Filipescu), *Pelrescu P. Benone* (lic. Milit., N. Filipescu), *Rădulescu Gh. Octavian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Reicher L. Herman* (lic. Internat, Iaşi), *Rohr J. Alexandru* (lic. Arad), *Şandor Vasile*, *Segal Zigu* (lic. Vaslui), *Şelmereanu Horia* (lic. Orăştie), *Slavov Iacob* (Bolgrad), *Solomon I. Isac* (lic. Internat, Iaşi), *Stefănescu F. Marin* (S-Lt), *Tătaru Alexandru* (lic. Orăştie) şi *Tilică C. Ştefan* (lic. T-Severin).

1606. — *Să se arate că se pot elimina x şi y din relaţiile*

$$\begin{cases} (x^3 - 3xy^2 - 2x^2 + 3x + 1) + iy(3x^2 - y^2 - 4x + 3) = a \\ x^2 - y^2 + 2ixy = b \end{cases}$$

şi în urmă să se efectueze eliminarea. ($i = \sqrt{-1}$)

V. ALACI

Soluţie dată de d-l: *Mircea A. Negrea* (Brăila). a şi b sunt funcţiuni de x şi y care verifică următoarea relaţie:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

In adevăr calculând determinantul funcţional Δ se are succesiv

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3x^2 - 3y^2 - 4x + 3 + 2iy(3x - 2) & -6xy + 4y + i(3x^2 - 3y^2 - 4x + 3) \\ 2x + 2iy & 2ix - 2y \end{vmatrix},$$

sau:

$$\Delta = 2[3x^2 - 3y^2 - 4x + 3 + 2iy(3x - 2)](ix - y) - 2(x + iy)[-6xy + 4y + i(3x^2 - 3y^2 - 4x + 3)]$$
$$= 2[i(3x^3 - 3xy^2 - 4x^2 + 3x - 6xy^2 + 4y^2) - 3x^2y + 3y^3 + 4xy - 3y - 3x^2y + 4xy]$$
$$- 2[i(3x^3 - 3xy^2 - 4x^2 + 3x - 6xy^2 + 4y^2) - 6x^2y + 4xy - 3x^2y + 3y^3 + 4xy - 3y].$$

Rezultă,

$$\Delta = 0 \cdot i + 0 \equiv 0.$$

Determinantul funcţional al funcţiilor $a(x, y)$ şi $b(x, y)$ fiind nul, urmează că între a şi b este o legătură,

$$a = \varphi(b),$$

deci din relaţiile date se poate elimina x şi y.

De altfel relaţiile din enunţ se pot scri:

$$\begin{cases} (x + iy)^3 - 2(x + iy)^2 + 3(x + iy) + 1 = a \\ (x + iy)^2 = b, \end{cases}$$

Inlocuind în prima relaţie valoarea lui $x + iy$ scoasă din a 2-a relaţie, obţinem:

$$\boxed{\pm b\sqrt{b} - 2b \pm 3\sqrt{b} + 3 = a}$$

sau :

$$\boxed{b(b+3)^2=(a+2b-1)^2}\,.$$

Aceasta este relaţia căutată.

Soluţie analoagă dată de d-l : *Dăscălescu Hristache* (Focşani).

Au efectuat numai eliminarea d-nii : *Andrunachievici A Vladimir* (student, Iaşi), *Berinde L. Titus* (Şc. Polit., Timişoara), *Florescu Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Jidanu I. C-tin* (lic. Beiuş), *Matei D. D-tru* (bacalaureat, Iaşi), *Rădulescu Gh. Octavian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Rosenblatt Millu* (lic. Internat, Iaşi), *Stefănescu F. Marin* (Sub-Lt), *Segal Zigu* (lic. Vaslui) şi *Tilică C. Ştefan* (lic. T-Severin).

PROBLEME PROPUSE

1720. — Să se găsească patratele perfecte de cinci cifre de forma $abcbc$ din care se obţin următoarele trei patrate perfecte :

$$accbb,\quad ccabb,\quad cbcbc.$$

N. Anitescu

1721. — Se se rezolve în numere întregi sistemul :

$$\begin{cases} x+y=u^2 \\ x^3+y^3=v^2\,. \end{cases}$$

A. Gloden

1722. — Să se arate că :

$$\lim_{n=\infty}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)\sqrt{n^2-k^2}}=1\,,$$

$$\lim_{n=\infty}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n\sqrt{(n^2+k^2)^3}}=\frac{3}{\sqrt{2}}-2\,.$$

Lt. C. D. Ionescu-Ţiu

1723. — Să se arate că dacă : $|1-x|>1$, se verifică egalitatea :

$$(2-x)\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{(1-x)^n}=-x\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(1-x)^n}$$

Mihail Botez

1724. — Să se demonstreze că într'un triughiu oarecare, perpendicularele scoborâte din picioarele bisectoarelor interioare pe dreptele ce unesc picioarele bisectoarelor exterioare corespunzătoare, cu centrul cercului înscris, sunt concurente.

G-l Gh Buicliu

1725. — In D un punct al semicercului circumscris triunghiului A B C se construeşte un unghiu $\widehat{CDH}$ egal cu $\widehat{ABC}$, care taie ipotenuza B C în H. Ridicând perpendiculara M H pe B C avem :

1°. M H şi B D se întâlnesc pe cateta A C.

2°. A H şi D H sunt simetrice faţă de M H.

3°. M H şi B D se întâlnesc pe simetrica lui A C pe B C.

Primele două puncte, când H e situat între B şi C, iar punctul al 3-lea când H e situat pe prelungirea ipotenuzei.

Stelian Cetateanu

1726. — Avem un triunghiu dreptunghic B A C, în care $B<45°$. Ducem bisectoarea A D a unghiului drept A şi o prelungim cu D E = A D, apoi luăm pe A B segmentul A F = A C şi în F ducem o perpendiculară pe A B, care întâlneşte pe B E în G. Să se demonstreze că,

$$F\,G=2\,A\,C\,.$$

V. Alaci

1727. — Să se rezolve ecuaţia :

$$\text{arc. tg}\,x+\text{arc. tg}\,2x+\text{arc. tg}\,3x=0\,.$$

D-tru Matei

Manuscrise primite de la corespondenții noștrii până la 10 a lunei curente și anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) și probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Anton Gh. George (1668, 1674, 1681, 1691, 1704); *Bakonyi C.* (1574, 1583, 1597, 1603, 1620, 1638, 1647, 1664, 1681); *Bârlea V. Suhăţeanu* (1663, 1674, 1690, 1691, 1699); *Boeru C. Alexandru* (1650, 1683); *Borneas Marius* (1659, 1667, 1674, 1681, 1687, 1704, 1705); *Cristea I. Nicolae* (P., 1664, 1668, 1690, 1696, 1703), *Dăscălescu Şt. Hristache* (P., 1220, 1231, 1250, 1253, 1701, 1704, 1707, 1710); *Gligor N. Ioan* (1674); *Jidanu I. C.* (1582, 1622, 1640, 1644, 1647, 1648, 1688, 1704, 1707, 1710, 1717, 1719); *Mihăileanu Andreiu* (1690); *Mureşan I. Octav* (1659, 1664, 1668, 1681, 1690, 1696, 1699, 1702); *Murgu V. Marţian* (P., 1611, 1614, 1616, 1617, 1629, 1630, 1646, 1648, 1649, 1664); *Muşca M. Miron* (1659, 1664, 1668, 1688); *Papadopol Elena* (1696, 1704); *Pasere Emil* (1696); *Stamate I. Ionel* (N., P., 1638, 1642, 1647, 1655, 1657, 1658, 1664, 1673, 1674, 1681, 1683, 1688, 1690, 1691, 1693, 1696, 1697, 1699, 1700, 1703); *Stefănescu F. Marin* (P., 1691, 1693, 1701, 1710, 1717, 1718); *Vijelie Gh. Eugen* (1603, 1620, 1650, 1681, 1683, 1688, 1690, 1691, 1696).

ŞCOALA POLITECHNICĂ TIMIŞOARA

Candidaţi reuşiţi la examenul de admitere în anul preparator, din 21. X. 1938, în ordinea clasificaţiei.

(Anul şcolar 1938—1939)

1. *Tică M. Mihai*
2. *Ioanoviciu T. Dorin*
3. *Alaci V. Victor*
4. *Teuşianu I. Ioan*
5. *Curuleac M. Gheorghe*
6. *Lupeanu D. Octavian*
7. *Trivaşov I. Vitalie*
8. *Ivaşcu V. Aurel*
9. *Stepan E Valeriu*
10. *Gheorghe V. Mişu*
11. *Loziciu D. Martin*
12. *Nix F. Ioan*
13. *Căpuşa E. Eftimie*
14. *Berindean V. Vasile*
15. *Lar V. Valeriu*
16. *Prohorov G. Boris*
17. *Hera V. Ioan*
18. *Tarţa V. Traian*
19. *Babeţiu T. Corneliu*
20. *Bălţat M. Gligor*
21. *Sulea G. Oreste Paul*
22. *Buşilă B. Vladimir*
23. *Paljanos I. Iuliu*
24. *Krivan Elemer*
25. *Manciu I. Aurel*
26. *Popa I. Ioan*
27. *Honae A. Constantin*
28. *Kiss I. Andrei*
29. *Sedmik C. Velimir*
30. *Glavian I. Armeneag*
31. *Mayer F. Francisc*
32. *Turcu R. Ionel*
33. *Cenade C. Petru*
34. *Ripeanu T. Andrei*
35. *Buhas I. Ovid Vasile*
36. *Kegyes St. Francisc*
37. *Miliţescu M. Eracle*
38. *Afurcheev M. Gheorghe*
39. *Cosma A. Gheorghe*
40. *Gherman N. Mircea*
41. *Coleş M Victor*
42. *Hellinger I. Egon Em.*
43. *Ionescu T. Gheorghe*
44. *Ivanov D. Victor*
45. *Ianculescu L. Mircea*
46. *Opriş I. Claudiu*
47. *Popescu I. Mihai Radu*
48. *Budel M. Cazimir*
49. *Jucovschi E. Vsevolod*
50. *Kovats G. Ladislau*
51. *Rusu O. Octavian*
52. *Căpăţ D. Traian*
53. *Keszeg St. Iosif*
54. *Orha M. Iuliu*
55. *Ploscaru T. Mircea*
56. *Kersch L. Leo*
57. *Moldovan T. Cornel*
58. *Petrovici C. Cornel*
59. *Morăraş E. Constantin*
60. *Oanţă I. Eliseu*
61. *Pârvu V. Teodor*
62. *Petrache St. Alexandru*
63. *Trenca V. Ernest*
64. *Hermann V. Tiberiu*
65. *Ambrus R. Romulus*
66. *Bublic G. Oleg*
67. *Muţiu S. Ioan*
68. *Roşescu V. A. Iuliu*
69. *Kun A. Adalbert*
70. *Nemeş N. Iuliu*
71. *Savii N Gheorghe*
72. *Juncu C. Nicolae*
73. *Morariu O. Tiberiu*
74. *Unger I. Victor*
75. *Cuzman D. Mircea*
76. *Hossu I. Ioan Iuliu*
77. *Burz C. Constantin*
78. *Suciu M. Nicolae*
79. *Veţian O. Iuliu*
80. *Foca V. Alexandru*
81. *Popeneciu I. Corn. Liviu*
82. *Tarapanov Gh. Gheorghe*
83. *Moyş V. Vasile*
84. *Simon A. Tiberiu*
85. *Borza T. Chirilă*
86. *Gallasch H. Hubert*
87. *Kohaut I. Ioan Pavel*
88. *Olinescu I. Gheorghe*
89. *Beregsanţiu V. Liviu*
90. *Sonea F. Ioan*
91. *Teodorovici I. Ioan*
92. *Tomi L. Ligia*

INFORMAŢIUNI

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL XI-LEA

care a început în Martie 1938.

Costul *special* a unui abonament este de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Pentru anul al XI, care a inceput în Martie 1938, s'a primit până acum la Redacţia „R. M. T." următorul abonament:

1. *Prof. Sergescu P.,* Universitatea, Cluj.
2. *Eugen Grabovschi,* Orhei - Basarabia, Strada I. C. Brătianu 14.

A APĂRUT IN BIBLIOTECA GAZETEI MATEMATICE:

CULEGERE DE PROBLEME DE TRIGONOMETRIE

Partea II,

Preţul 125 Lei — TRIGONOMETRIA PLANĂ

Acei care se interesează de identităţile în numere întregi de diferite grade, în special cu problemele *Tarry,* sunt rugaţi a intra în corespondenţă cu mine, *Alfred Moessner* Nürnberg (Germania), Grolandstrasse 79.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Legându-se colecţia R. M. T., anul XVIII, în volum şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XVII, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS:
1 an: Belgique, **30 fr.** France, **25** fr.
Etranger, 7 **belgas**

Administration:
SPHINX, Bruxelles 173, Avenue Longchamp

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

ANUL XVIII. 15 DECEMVRIE 1938 No. 10.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **V. ALACI:** TRIGONOMETRIA PATRATICA.
2. NOTE MATEMATICE: 20.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 176, 1437, 1649
5. PROBLEME PROPUSE: 1728-1735.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colț al țării și de la orice școală, trebuie să fie apostol al specialității sale. Din felul cald și luminos cum își face lecțiile, din drumul drept și demn pe care îl urmează în viață, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă și sigură, curată ca cristalul, are o înaltă și admirabilă valoare educativă pentru viață.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieței noastre. Aceasta să fie contribuția specialității noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ȚIȚEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Școala Politechnică, Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu,** Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii și cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timișoara" este pentru anul XVIII, de 200 (două sute) lei.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVIII inclusiv, broșate, 120 lei fiecare.

ANUL XVIII — No. 10 TIMISOARA, 15 DECEMVRIE 1938

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

TRIGONOMETRIA PATRATICĂ.

DE

V. ALACI
PROFESOR

Analog *funcțiunilor periodice circulare, sinus, cosinus, tangentă, cotangentă, secantă* și *cosecantă,* ne propunem a studia alte funcțiuni periodice asemănătoare pe care le-am numit *funcțiuni patratice,* pentru că sunt în legătură cu un anumit patrat fundamental.

Funcțiunile patratice, noile funcțiuni ce le vom defini și studia în cele ce urmează, cu toate că sunt asemănătoare cu cele din *Trigonometria circulară,* prin definiție, periodicitate și unele din proprietățile lor, se deosebesc însă de ele din alte multe puncte de vedere.

Astfel, *funcțiunile patratice,* spre deosebire de cele *circulare,* admit formule de adițiune raționale în raport cu ele însăși și cu toate că unele sunt continue, derivatele lor sunt discontinue în anumite puncte ale graficelor lor reprezentative. Unele din aceste grafice sunt niște *curbe noui* pe care le-am numit *„curbe acolade"* din cauza asemănării lor cu acolada obicinuită.

Vom studia încă, o altă *nouă funcțiune,* derivata și reprentarea sa grafică.

Caracteristic pentru *funcțiunile patratice,* cum vom vedea, este și faptul că ele nu se pot exprima în tot domeniul lor de existență, prin *expresiuni unice* de *funcțiuni circulare.*

Ele prezintă din acest punct de vedere caracterul unor *serii trigonometrice Fourier,* pentru că în diferite intervale coincid cu expresiuni de funcțiuni circulare, modificate.

Aceste *funcțiuni patratice,* pot fi folosite cu succes în aplicațiuni și probleme de rezolvirea triunghiurilor, de aceea titlul lucrării ce prezentăm este **„Trigonometria patratică".** *)

Am împărțit acest studiu în următoarele patru părți:

I. Studiul funcțiunilor patratice.
II. Trigonometria rectilinie patratică.
III. Aplicațiuni și probleme la rezolvirea triunghiurilor.
IV. Chestiuni diverse, în legătură cu funcțiunile patratice.

In tratarea chestiunilor, vom urmări aproape aceiași ordine ca în *Trigonometria circulară.*

PARTEA I-a

STUDIUL FUNCȚIUNILOR PATRATICE.

Sinusul și cosinusul patratic.

1. Fie patratul fundamental $A\,B\,A'\,B'$ (fig. 1.), (cu semidiagonala $O\,A = 1$) și fie un unghiu oarecare $\sphericalangle A\,O\,C = \alpha$.

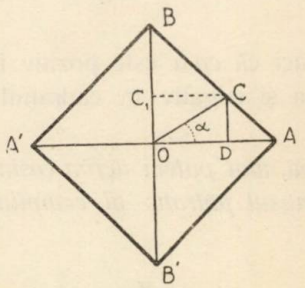


Fig. 1.

*) Origina lucrării prezente este comunicarea ce am făcut-o la Societatea de Științe din București, secțiunea matematică, în 16 Ianuarie 1912. cu subiectul: *Studiul unor funcțiuni periodice care admit o formulă de adițiune rațională în raport cu ele însăși.*
Această comunicare a fost publicată în *„Gazeta Matematică"* vol. XVII, p. 241.

Tot α este şi arcul corespunzător al cercului circumscris patratului A B A′ B′, dată fiind corespondenţa între unghiul la centru şi arcul ce îi corespunde.

2. **Definiţii.** 1°. *Numim sinus patratic al unghiului* $\sphericalangle A O C = \alpha$, *sau a arcului* α, *raportul luat cu un anumit semn pe care îl vom preciza, între lungimea perpendicularei* $\overline{C D}$ *dusă din* C *pe* O A *şi* $\overline{O A} = 1$.

Putem scri astfel,

$$sp\,\alpha = \pm \frac{\overline{C D}}{\overline{O A}} = \pm \overline{C_1 D},$$

$sp\,\alpha$ cetindu-se: *sinusul patratic de* α.

Dacă C_1, proecţia ortogonală a lui C pe diagonala B′ B, cade între O şi B, convenim să luăm $sp\,\alpha$ pozitiv, iar dacă C_1 cade între O şi B′, $sp\,\alpha$ îl considerăm negativ.

Rezultă de aci că $sp\,\alpha$ este pozitiv dacă α este în primul şi al 2-lea cadran şi negativ dacă α este în cadranul al 3-lea sau al 4-lea.

2°. *Numim cosinus patratic al unghiului* $\overset{\frown}{A O C} = \alpha$ *sau a arcului* α, *raportul luat cu un anumit semn, între distanţa* $\overline{O D}$ *şi* $\overline{O A} = 1$.

Vom scri prescurtat,

$$cp\,\alpha = \pm \frac{\overline{O D}}{\overline{O A}} = \pm \overline{O D},$$

$cp\,\alpha$ cetindu-se: *cosinusul patratic de* α.

Convenim să considerăm $cp\,\alpha$ pozitiv, când D se găseşte între O şi A şi negativ când D se află între O şi A′.

Rezultă de aci că $cp\,\alpha$ este pozitiv în primul şi al 4-lea cadran şi negativ în cadranul al 2-lea şi al 3-lea.

Privind figura, *mai putem defini cosinusul patratic de* α *ca sinusul patratic al complimentului lui* α, *adică:*

$$cp\,\alpha = sp\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

3. Funcţiunile $sp\,\alpha$ şi $cp\,\alpha$ sunt periodice, de periodă 2π, cum uşor putem observa. Avem astfel:

$$sp\,(2k\pi + \alpha) = sp\,\alpha, \qquad cp\,(2k\pi + \alpha) = cp\,\alpha,$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

4. Iată şi un mic tablou de variaţie pentru $sp\,\alpha$ şi $cp\,\alpha$, care se poate urmări cu uşurinţă pe figură.

α	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
$sp\,\alpha$	0	0,5	1	0,5	0	−0,5	−1	−0,5	0
$cp\,\alpha$	1	0,5	0	−0,5	−1	−0,5	0	0,5	1

Tangenta şi cotangenta patratică.

5. Pentru *tangenta* şi *cotangenta patratică* a unui unghiu $\sphericalangle A O C = \alpha$ sau a unui arc α, păstrăm aceiaşi definiţie şi notaţie ca şi pentru *tangenta* şi *cotangenta circulară* cu care coincid. Ele nu constitue noui funcţiuni şi astfel nu vor figura în calculele noastre de cât sub forma obicinuită.

Secanta şi cosecanta patratică.

6. Definiţiile ce le-am ales pentru *secanta* şi *cosecanta patratică* a unui unghiu sau a unui arc s'au impus din dorinţa ca ele să se bucure de aceleaşi proprietăţi ca *secanta* şi *cosecanta circulară*, adică de a fi respectiv inversele *cosinusului* şi *sinusului patratic* a unghiului sau arcului corespunzător, cum vom invedera.

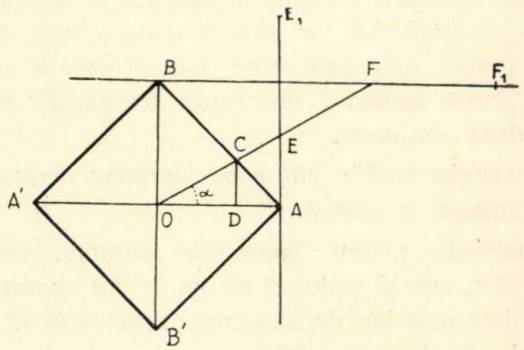


Fig. 2.

Pentru aceasta, fie patratul fundamental A B A′ B′ (fig. 2) şi ducem perpendiculare pe A′ A în A şi pe B′ B în B. Considerăm apoi unghiul $\sphericalangle A O C = \alpha$ şi fie E, F intersecţiile lui O C cu perpendicularele

din A şi B. Prelungim pe A E în *acelaşi senz* cu $\overline{E E_1} = 1$ şi pe B F în *acelaşi senz* cu $\overline{F F_1} = 1$.

7. **Definiţii.** 1°. *Numim secantă patratică a unghiului* $\sphericalangle A O C = \alpha$ *sau a arcului* α, *raportul luat cu un anumit semn între* $\overline{A E_1}$ *şi* $\overline{O A} = 1$.

Vom scri prescurtat,

$$Sp\,\alpha = \pm \frac{\overline{A E_1}}{\overline{O A}} = \pm \overline{A E_1},$$

$Sp\,\alpha$ scris cu iniţială mare, cetindu-se: *secanta patratică de* α.

Convenim să luăm pentru $Sp\,\alpha$ semnul $+$, când punctul E se obţine prelungind pe O C în *acelaşi senz* şi semnul $-$, când punctul E se obţine prelungind pe O C în *senz contrar.*

Urmează că $Sp\,\alpha$, în primul cadran este pozitivă şi variază de la 1 la $+\infty$; în al 2-lea cadran este negativă şi variază de la $-\infty$ la -1; în al 3-lea cadran este negativă şi variază de la -1 la $-\infty$; în al 4-lea cadran este positivă şi variază de la $+\infty$ la 1.

2°. *Numim cosecantă patratică a unghiului* $\sphericalangle A O C = \alpha$ *sau a arcului* α, *raportul luat cu un anumit semn între* $\overline{B F_1}$ *şi* $\overline{O A} = 1$.

Vom scri prescurtat,

$$Cp\,\alpha = \pm \frac{\overline{B F_1}}{\overline{O A}} = \pm \overline{B F_1},$$

$Cp\,\alpha$ scris cu iniţială mare cetindu-se: *cosecanta patratică de* α.

Convenim să luăm pentru $Cp\,\alpha$ semnul $+$, când punctul F se obţine prelungind pe O C în *acelaşi senz* şi semnul $-$, când punctul F se obţine prelungind pe O C în *senz contrar.*

Urmează că $Cp\,\alpha$, în primul cadran este pozitivă şi variază de la $+\infty$ la 1; în al 2-lea cadran este pozitivă şi variază de la 1 la $+\infty$; în al 3-lea cadran este negativă şi variază de la $-\infty$ la -1; în al 4-lea cadran este negativă şi variază de la -1 la $-\infty$.

Mai putem defini cosecanta patratică de α *ca secanta patratică a complimentului lui* α, adică:

$$Cp\,\alpha = Sp\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

TEOREME RELATIVE LA FUNCŢIUNILE PATRATICE.

8. *Pentru funcţiunile patratice ale arcelor egale şi de semne contrare, ale arcelor suplimentare şi ale acelora care diferă cu 180°, putem stabili cu uşurinţă unele teoreme analoage acelora cunoscute pentru funcţiunile circulare, astfel că nu vom insista asupra demonstraţiilor.*

Aceste teoreme le concretizăm numai prin următoarele relaţii,

$$(1)\quad \begin{aligned} sp\,\alpha &= -\,sp\,(-\alpha) \\ cp\,\alpha &= cp\,(-\alpha) \\ Sp\,\alpha &= Sp\,(-\alpha) \\ Cp\,\alpha &= -\,Cp\,(-\alpha) \end{aligned} \qquad (2\quad \begin{aligned} sp\,\alpha &= sp\,(\pi - \alpha) \\ cp\,\alpha &= -\,cp\,(\pi - \alpha) \\ Sp\,\alpha &= -\,Sp\,(\pi - \alpha) \\ Cp\,\alpha &= Cp\,(\pi - \alpha) \end{aligned}$$

$$(3)\quad \begin{aligned} sp\,\alpha &= -\,sp\,(\pi + \alpha) \\ cp\,\alpha &= -\,cp\,(\pi + \alpha) \\ Sp\,\alpha &= -\,Sp\,(\pi + \alpha) \\ Cp\,\alpha &= -\,Cp\,(\pi + \alpha), \end{aligned}$$

demonstraţiile făcându-se analog ca în *Trigonometria circulară.*

9. Cu ajutorul acestor teoreme şi a proprietăţii de periodicitate, putem reduce *funcţiunile patratice* ale unui arc oarecare, la *funcţiunile patratice* ale unui arc din primul cadran.

FORMULE FUNDAMENTALE.

10. Ne propunem a stabili unele relaţiuni între *funcţiunile patratice* ce le-am definit, pe care le vom numi *formule fundamentale.*

Pentru aceasta fie patratul fundamental A B A′ B′, unghiul $\sphericalangle A O C = \alpha$ (fig. 2) şi funcţiunile patratice corespunzătoare:

$$sp\,\alpha = \overline{C D}, \qquad cp\,\alpha = \overline{O D},$$

$$Sp\,\alpha = \overline{A E_1}, \qquad Cp\,\alpha = \overline{B F_1}.$$

Vom considera următoarele două cazuri:

Cazul când α este în primul cadran.

11. *Dacă* $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, *putem stabili următoarele formule fundamentale:*

(4) $$\boxed{sp\,\alpha + cp\,\alpha = 1},$$

(5) $$\boxed{Sp\,\alpha = \frac{1}{cp\,\alpha}}, \qquad (6)\ \boxed{Cp\,\alpha = \frac{1}{sp\,\alpha}}.$$

Demonstrații. 1°. Observăm că triunghiul A D C este isoscel, deci

$$\overline{C\,D} = \overline{D\,A} = sp\,\alpha,$$

astfel că relația evidentă, $\overline{D\,A} + \overline{O\,D} = 1$, devine:

$$sp\,\alpha + cp\,\alpha = 1.$$

Formula (4) este astfel stabilită.

2°. Triunghiurile O A E și O D C fiind asemenea rezultă:

$$\frac{\overline{A\,E}}{\overline{O\,A}} = \frac{\overline{C\,D}}{\overline{O\,D}}, \quad \text{sau:} \quad \frac{\overline{A\,E}}{1} = \frac{sp\,\alpha}{cp\,\alpha}.$$

Aplicând o proprietate cunoscută a proporțiilor, avem:

$$\frac{\overline{A\,E} + 1}{1} = \frac{sp\,\alpha + cp\,\alpha}{cp\,\alpha}.$$

Cum prin definiție, $\overline{A\,E} + 1 = Sp\,\alpha$, rezultă:

$$Sp\,\alpha = \frac{1}{cp\,\alpha}.$$

Avem stabilită astfel formula (5).

3°. Triunghiurile O B F și O D C fiind asemenea, rezultă:

$$\frac{\overline{B\,F}}{\overline{O\,B}} = \frac{\overline{O\,D}}{\overline{C\,D}}, \quad \text{sau:} \quad \frac{\overline{B\,F}}{1} = \frac{cp\,\alpha}{sp\,\alpha}.$$

Aplicând o proprietate cunoscută a proporțiilor, avem:

$$\frac{\overline{B\,F} + 1}{1} = \frac{sp\,\alpha + cp\,\alpha}{sp\,\alpha} = \frac{1}{sp\,\alpha}.$$

Cum prin definiție, $\overline{B\,F} + 1 = Cp\,\alpha$, obținem:

$$Cp\,\alpha = \frac{1}{sp\,\alpha}.$$

Formula (6) este astfel stabilită.

Observare. Formulele fundamentale (4), (5) și (6) sunt valabile și pentru toate arcele de forma, $2k\pi + \alpha$, $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

Cazul când α este în alte cadrane.

12. Pentru cazul când α este în alte cadrane de cât primul, *formula* (4) *se modifică pe când formulele* (5) *și* (6) *rămân invariabile.*

Este ușor de observat pe figură, atunci când α este în cadranele al 2-lea, al 3-lea și al 4-lea că, formula (4) se modifică și devine,

$$sp\,\alpha - cp\,\alpha = 1, \qquad \text{pentru } \frac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \pi,$$

$$(4') \quad sp\,\alpha + cp\,\alpha = -1, \qquad \text{„ } \pi \leqq \alpha \leqq \frac{3\pi}{2},$$

$$sp\,\alpha - cp\,\alpha = -1, \qquad \text{„ } \frac{3\pi}{2} \leqq \alpha \leqq 2\pi,$$

pe când formulele (5) și (6) rămân neschimbate.

Relațiile (4') *și faptul că formulele* (5) *și* (6) *rămân neschimbate pentru diferite cadrane, se pot demonstra și cu ajutorul teoremelor exprimate prin relațiile* (1), (2) *și* (3).

1°. Astfel dacă α este în al 2-lea cadran, $\pi - \alpha$ este în primul cadran și avem:

$$sp\,(\pi - \alpha) + cp\,(\pi - \alpha) = 1,$$

$$Sp\,(\pi - \alpha) = \frac{1}{cp\,(\pi - \alpha)}, \quad Cp\,(\pi - \alpha) = \frac{1}{sp\,(\pi - \alpha)}.$$

Dacă ținem seamă însă de formulele (2), aceste relații devin:

$$sp\,\alpha - cp\,\alpha = 1, \quad Sp\,\alpha = \frac{1}{cp\,\alpha}, \quad Cp\,\alpha = \frac{1}{sp\,\alpha}.$$

2°. Dacă α este în al 3-lea cadran, $\pi + \alpha$ este cadranul al 5-lea și se aplică formulele (4), (5) și (6), conform observării de la § 11, adică avem:

$$sp\,(\pi + \alpha) + cp\,(\pi + \alpha) = 1,$$

$$Sp\,(\pi + \alpha) = \frac{1}{cp\,(\pi - \alpha)}, \quad Cp\,(\pi + 1) = \frac{1}{sp\,(\pi - \alpha)}.$$

In baza formulelor (3), aceste relații devin:

$$sp\,\alpha + cp\,\alpha = -1,$$

$$Sp\,\alpha = \frac{1}{cp\,\alpha}, \quad Cp\,\alpha = \frac{1}{sp\,\alpha}.$$

3°. Pentru α în al 4-lea cadran, $2\pi - \alpha$ este în primul cadran și i se poate aplica formulele (4), (5) și (6), care ne dau:

$$sp(2\pi-\alpha)+cp(2\pi-\alpha)=1,$$

$$Sp(2\pi-\alpha)=\frac{1}{cp(2\pi-\alpha)},$$

$$Cp(2\pi-\alpha)=\frac{1}{sp(2\pi-\alpha)}.$$

In virtutea periodicităţii aceste relaţii devin,

$$sp(-\alpha)+cp(-\alpha)=1,$$

$$Sp(-\alpha)=\frac{1}{cp(-\alpha)}, \qquad Cp(-\alpha)=\frac{1}{sp(-\alpha)},$$

iar în baza formulelor (1) putem scri încă:

$$sp\,\alpha-cp\,\alpha=-1, \quad Sp\,\alpha=\frac{1}{cp\,\alpha}, \quad Cp\,\alpha=\frac{1}{sp\,\alpha}.$$

Observare. Formulele (4) şi (4′) pot fi cuprinse concentrat în formula generală,

$$\boxed{sp\,\alpha\pm cp\,\alpha=\pm 1} \tag{4''}$$

convenind a lua acolo unde avem dublu semn, perechile de semne,

$$++;\quad -+;\quad +-;\quad --,$$

după cum arcul α este respectiv în cadranele I, II, III şi IV, sau în acelea congruente lor cu 2π.

FUNCŢIUNILE PATRATICE EXPRIMATE PRIN FUNCŢIUNI CIRCULARE.

13. Ne propunem a exprima *funcţiunile patratice* ce le-am definit, prin *funcţiuni circulare.*

Pentru aceasta observăm că triunghiurile O D C şi O A E (fig. 2.) sunt asemenea şi avem:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{OD}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{OA}}, \qquad \text{sau:}\quad \frac{sp\,\alpha}{cp\,\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1}.$$

Aplicând o proprietate cunoscută a proporţiilor, putem scri:

$$\frac{sp\,\alpha}{sp\,\alpha\pm cp\,\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha\pm 1} \quad \text{si:}\quad \frac{sp\,\alpha\pm cp\,\alpha}{cp\,\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\pm 1.$$

Aceste relaţii, având în vedere formula fundamentală (4″), ne dau:

$$\boxed{sp\,\alpha=\frac{\pm\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha\pm 1}}, \tag{7}$$

$$\boxed{cp\,\alpha=\frac{\pm 1}{\operatorname{tg}\alpha\pm 1}}. \tag{8}$$

De asemenea, formulele fundamentale (5) şi (6), în virtutea relaţiilor (7) şi (8), devin:

$$\boxed{Sp\,\alpha=\pm(\operatorname{tg}\alpha\pm 1)}, \tag{9}$$

$$\boxed{Cp\,\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm 1}{\pm\operatorname{tg}\alpha}=\pm(1+\operatorname{cotg}\alpha)}. \tag{10}$$

Specificând în formulele (7), (8), (9) şi (10) semnele ce corespund diferitelor cadrane, *obţinem următorul tablou, care exprimă funcţiunile patratice prin funcţiuni circulare.*

(11)

cadranul	I.	II.	III.	IV.
$sp\,\alpha$	$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$	$\frac{-\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$	$\frac{-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$	$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$
$cp\,\alpha$	$\frac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha}$	$\frac{-1}{1-\operatorname{tg}\alpha}$	$\frac{-1}{1+\operatorname{tg}\alpha}$	$\frac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha}$
$Sp\,\alpha$	$1+\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha-1$	$-(1+\operatorname{tg}\alpha)$	$1-\operatorname{tg}\alpha$
$Cp\,\alpha$	$1+\operatorname{cotg}\alpha$	$1-\operatorname{cotg}\alpha$	$-(1+\operatorname{cotg}\alpha)$	$\operatorname{cotg}\alpha-1$

Acest tablou este evident valabil şi pentru cadranale congruente cu 2π celor indicate.

14. Reiasă din acest tablou că *funcţiunile patratice* nu se pot traduce prin *expresiuni unice de funcţiuni circulare* valabile în tot domeniul lor de existenţă. De ar fi fost astfel, *aceste noui funcţiuni,* n'ar fi fost de cât nişte notaţii prescurtate pentru unele *expresiuni de funcţiuni circulare,* notaţii de altfel destul de remarcabile prin semnificarea lor geometrică. Caracteristic pentru *funcţiunile patratice* este tocmai faptul că, expresiunile de *funcţiuni circulare* echivalente lor, se modifică pentru diferitele intervale de variaţie ale arcului, prezentând din acest punct de vedere proprietăţi analoage cu acelea ale unor serii trigonometrice *Fourier.*

Alte relaţiuni de transformare.

15. Avem în tabloul (11) pentru $0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$,

$$sp\,\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}, \qquad cp\,\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha}.$$

Aceste relaţii se mai pot scri evident:

$$sp\,\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}\right),\quad cp\,\alpha = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}\right),$$

sau:

$$(12)\quad \boxed{sp\,\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}(45^0-\alpha)}{2}},$$

$$(13)\quad \boxed{cp\,\alpha = \frac{1+\operatorname{tg}(45^0-\alpha)}{2}}.$$

Mai general, atunci când α este oarecare, avem formulele:

$$(12')\quad sp\,\alpha = \pm\frac{1-\operatorname{tg}(45^0 \mp \alpha)}{2},$$

$$(13')\quad cp\,\alpha = \pm\frac{1+\operatorname{tg}(45^0 \mp \alpha)}{2},$$

unde trebuie luat acolo unde este dublu semn, perechi de semne convenabile, când α este în cadranele I, II, III, IV sau în acelea congruente lor cu 2π.

TABELE PENTRU VALORILE NATURALE ALE FUNCŢIUNILOR PATRATICE.

16. Este suficient să găsim valorile *funcţiunilor patratice* numai ale arcelor din primul cadran, cum am aratat la (No. 9).

Valorile naturale ale lui $sp\,\alpha$ şi $cp\,\alpha$.

17. Aceste valori se obţin cu uşurinţă folosind formulele (12) şi (13), de oarece avem tabelă pentru valorile naturale ale tangentei unui arc.

Apoi relaţia

$$sp\,(45^0+\alpha) = cp\,(45^0-\alpha),$$

ne permite a calcula pe $sp\,\alpha$ şi $cp\,\alpha$ numai pentru $0 \leqq \alpha \leqq 45^0$.

Iată un exemplu: *Să se calculeze $sp\,12^0$ şi $cp\,12^0$.* In adevăr, formulele (12) şi (13) ne dau:

$$sp\,12^0 = \frac{1-\operatorname{tg}33^0}{2},\qquad cp\,12^0 = \frac{1+\operatorname{tg}33^0}{2},$$

(sau, $cp\,12^0 = 1 - sp\,12^0$).

Tabela 1.

Grade	sinusul patratic							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,00000	0,00290	0,00578	0,00865	0,01150	0,01433	0,01715	89
1	0,01715	0,01996	0,02274	0,02552	0,02827	0,03101	0,03374	88
2	0,03374	0,03645	0,03915	0,04183	0,04450	0,04715	0,04980	87
3	0,04980	0,05242	0,05504	0,05763	0,06022	0,06279	0,06535	86
4	0,06535	0,06790	0,07044	0,07296	0,07547	0,07796	0,08045	85
5	0,08045	0,08292	0,08538	0,08783	0,09027	0,09269	0,09511	84
6	0,09511	0,09751	0,09990	0,10228	0,10465	0,10701	0,10935	83
7	0,10935	0,11169	0,11402	0,11633	0,11864	0,12094	0,12322	82
8	0,12322	0,12550	0,12776	0,13002	0,13226	0,13450	0,13673	81
9	0,13673	0,13894	0,14115	0,14335	0,14554	0,14772	0,14989	80
10	0,14989	0,15206	0,15421	0,15636	0,15849	0,16062	0,16274	79
11	0,16274	0,16486	0,16696	0,16905	0,17114	0,17322	0,17529	78
12	0,17529	0,17736	0,17941	0,18146	0,18350	0,18554	0,18756	77
13	0,18756	0,18958	0,19159	0,19360	0,19559	0,19758	0,19957	76
14	0,19957	0,20154	0,20351	0,20547	0,20743	0,20938	0,21132	75
15	0,21132	0,21326	0,21519	0,21711	0,21903	0,22094	0,22284	74
16	0,22284	0,22474	0,22663	0,22852	0,23040	0,23227	0,23414	73
17	0,23414	0,23601	0,23786	0,23971	0,24156	0,24340	0,24523	72
18	0,24523	0,24706	0,24889	0,25071	0,25252	0,25433	0,25613	71
19	0,25613	0,25793	0,25972	0,26151	0,26329	0,26507	0,26684	70
20	0,26684	0,26861	0,27038	0,27213	0,27389	0,27564	0,27738	69
21	0,27738	0,27912	0,28086	0,28259	0,28432	0,28604	0,28776	68
22	0,28776	0,28947	0,29118	0,29289	0,29459	0,29629	0,29798	67
23	0,29798	0,29967	0,30136	0,30304	0,30472	0,30639	0,30807	66
24	0,30807	0,30973	0,31140	0,31306	0,31471	0,31636	0,31801	65
25	0,31801	0,31966	0,32130	0,32294	0,32457	0,32621	0,32783	64
26	0,32783	0,32946	0,33108	0,33270	0,33432	0,33593	0,33754	63
27	0,33754	0,33914	0,34075	0,34235	0,34395	0,34554	0,34713	62
28	0,34713	0,34872	0,35031	0,35189	0,35347	0,35505	0,35662	61
29	0,35662	0,35820	0,35977	0,36134	0,36290	0,36446	0,36602	60
30	0,36602	0,36758	0,36914	0,37069	0,37224	0,37379	0,37533	59
31	0,37533	0,37688	0,37842	0,37996	0,38150	0,38303	0,38456	58
32	0,38456	0,38609	0,38762	0,38915	0,39068	0,39220	0,39372	57
33	0,39372	0,39524	0,39676	0,39827	0,39979	0,40130	0,40281	56
34	0,40281	0,40432	0,40582	0,40733	0,40883	0,41033	0,41183	55
35	0,41183	0,41333	0,41483	0,41633	0,41782	0,41931	0,42081	54
36	0,42081	0,42230	0,42378	0,42527	0,42676	0,42824	0,42973	53
37	0,42973	0,43121	0,43269	0,43417	0,43565	0,43713	0,43861	52
38	0,43861	0,44008	0,44156	0,44303	0,44450	0,44597	0,44745	51
39	0,44745	0,44892	0,45038	0,45185	0,45332	0,45479	0,45625	50
40	0,45625	0,45772	0,45918	0,46065	0,46211	0,46357	0,46503	49
41	0,46503	0,46650	0,46796	0,46942	0,47088	0,47233	0,47379	48
42	0,47379	0,47525	0,47671	0,47817	0,47962	0,48108	0,48254	47
43	0,48254	0,48399	0,48545	0,48690	0,48836	0,48982	0,49127	46
44	0,49127	0,49272	0,49418	0,49563	0,49709	0,49854	0 50000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grade
	cosinusul patratic							

Căutând într'o tabelă cu valorile naturale ale tangentei, găsim,

$$\operatorname{tg} 33^0 = 0{,}64941,$$

astfel că

$$sp\, 12^0 = \frac{1 - 0{,}64941}{2} = 0{,}175295,$$

$$cp\, 12^0 = \frac{1 + 0{,}64941}{2} = 0{,}824705.$$

Analog procedăm pentru orice arc $0 \leqq \alpha \leqq 45^0$. Folosind tabelele 3. şi 4. pp. 36—37 din *Hütte* ediţia 26 am construit în acest fel tabelele 1. şi 2. alăturate, care cuprind valorile naturale pentru $sp\,\alpha$ şi $cp\,\alpha$ din 10′ în 10′, $0 \leqq \alpha \leqq 90^0$.

Tabela 2.

Grade	cosinusul patratic							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	1,00000	0,99710	0,99421	0,99135	0,98850	0,98566	0,98284	89
1	0,98284	0,98004	0,97725	0,97448	0,97172	0,96898	0,96626	88
2	0,96626	0,96354	0,96085	0,95816	0,95549	0,95284	0,95020	87
3	0,95020	0,94757	0,94496	0,94236	0,93977	0,93720	0,93464	86
4	0,93464	0,93209	0,92956	0,92704	0,92453	0,92203	0,91955	85
5	0,91955	0,91707	0,91461	0,91217	0,90973	0,90730	0,90489	84
6	0,90489	0,90249	0,90010	0,89772	0,89535	0,89299	0,89064	83
7	0,89064	0,88830	0,88598	0,88366	0,88136	0,87906	0,87677	82
8	0,87677	0,87450	0,87223	0,86998	0,86773	0,86550	0,86327	81
9	0,86327	0,86105	0,85884	0,85664	0,85445	0,85227	0,85010	80
10	0,85010	0,84794	0,84578	0,84364	0,84150	0,83937	0,83725	79
11	0,83725	0,83514	0,83304	0,83094	0,82885	0,82677	0,82470	78
12	0,82470	0,82264	0,82058	0,81853	0,81649	0,81446	0,81243	77
13	0,81243	0,81041	0,80840	0,80640	0,80440	0,80241	0,80043	76
14	0,80043	0,79845	0,79648	0,79452	0,79256	0,79062	0,78867	75
15	0,78867	0,78674	0,78481	0,78288	0,78097	0,77906	0,77715	74
16	0,77715	0,77525	0,77336	0,77148	0,76960	0,76772	0,76585	73
17	0,76585	0,76399	0,76213	0,76028	0,75844	0,75660	0,75476	72
18	0,75476	0,75293	0,75111	0,74929	0,74747	0,74567	0,74386	71
19	0,74386	0,74207	0,74027	0,73849	0,73670	0,73492	0,73315	70
20	0,73315	0,73138	0,72962	0,72786	0,72611	0,72436	0,72261	69
21	0,72261	0,72087	0,71914	0,71740	0,71568	0,71395	0,71223	68
22	0,71223	0,71052	0,70881	0,70710	0,70540	0,70370	0,70201	67
23	0,70201	0,70032	0,69863	0,69695	0,69527	0,69360	0,69193	66
24	0,69193	0,69026	0,68860	0,68694	0,68528	0,68363	0,68198	65
25	0,68198	0,68034	0,67870	0,67706	0,67542	0,67379	0,67216	64
26	0,67216	0,67054	0,66891	0,66730	0,66568	0,66407	0,66246	63
27	0,66246	0,66085	0,65925	0,65765	0,65605	0,65445	0,65286	62
28	0,65286	0,65127	0,64969	0,64810	0,64652	0,64495	0,64337	61
29	0,64337	0,64180	0,64023	0,63866	0,63709	0,63553	0,63397	60
30	0,63397	0,63241	0,63086	0,62931	0,62776	0,62621	0,62466	59
31	0,62466	0,62312	0,62158	0,62004	0,61850	0,61696	0,61543	58
32	0,61543	0,61390	0,61237	0,61084	0,60932	0,60780	0,60628	57
33	0,60628	0,60476	0,60324	0,60172	0,60021	0,59870	0,59719	56
34	0,59719	0,59568	0,59417	0,59267	0,59116	0,58966	0,58816	55
35	0,58816	0,58666	0,58516	0,58367	0,58217	0,58068	0,57919	54
36	0,57919	0,57770	0,57621	0,57472	0,57324	0,57175	0,57027	53
37	0,57027	0,56879	0,56730	0,56582	0,56434	0,56287	0,56139	52
38	0,56139	0,55991	0,55844	0,55697	0,55549	0,55402	0,55255	51
39	0,55255	0,55108	0,54961	0,54814	0,54667	0,54521	0,54374	50
40	0,54374	0,54228	0,54081	0,53935	0,53789	0,53642	0,53496	49
41	0,53496	0,53350	0,53204	0,53058	0,52912	0,52766	0,52620	48
42	0,52620	0,52474	0,52329	0,52183	0,52037	0,51891	0,51746	47
43	0,51746	0,51600	0,51455	0,51309	0,51164	0,51018	0,50873	46
44	0,50873	0,50727	0,50582	0,50436	0,50291	0,50145	0,50000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grade
	sinusul patratic							

Valorile naturale ale lui $Sp\,\alpha$ şi $Cp\,\alpha$.

18. Formulele din tabloul (11),

$$Sp\,\alpha = 1 + \operatorname{tg}\alpha,$$

$$Cp\,\alpha = 1 + \operatorname{cotg}\alpha, \quad 0 \leqq \alpha \leqq 90^0,$$

ne arată că trebuie să mărim cu 1 valorile naturale ale tangentei şi cotangentei arcului α pentru a avea valorile naturale pentru $Sp\,\alpha$ şi $Cp\,\alpha$.

Exemplu.

$$Sp\,45^0 = 1 + \operatorname{tg} 45^0 = 2,$$

$$Cp\,45^0 = 1 + \operatorname{cotg} 45^0 = 2.$$

Pentru α în alte cadrane folosim formulele corespunzătoare din tabloul (11) pentru $Sp\,\alpha$, $Cp\,\alpha$.

TABELE PENTRU LOGARITMII FUNCŢIUNILOR PATRATICE.

19. 1°. Formulele din tabloul (11)

$$sp\,\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha},$$

$$cp\,\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}\alpha},$$

în urma unor transformări obicinuite se mai pot scri:

$$(14) \qquad sp\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}\sin(45^0 + \alpha)}$$

$$(15) \qquad cp\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}\sin(45^0 + \alpha)}.$$

Aplicând logaritmii avem:

(16) $\log sp\,\alpha = \log \sin \alpha - \log \sin (45^0 + \alpha) - \frac{\log 2}{2}$

(17) $\log cp\,\alpha = \log \cos \alpha - \log \sin (45^0 + \alpha) - \frac{\log 2}{2}$.

2°. Din relațiile cunoscute,

$$Sp\,\alpha = \frac{1}{cp\,\alpha}, \qquad Cp\,\alpha = \frac{1}{sp\,\alpha},$$

deducem încă:

(18) $\log Sp\,\alpha = \operatorname{colog} cp\,\alpha$,

(19) $\log Cp\,\alpha = \operatorname{colog} sp\,\alpha$.

Relațiile (16), (17), (18) și (19) servesc pentru calcularea logaritmilor *funcțiunilor patratice.*

Exemplu. Să se afle logaritmii funcțiunilor patratice ale arcului de 15°,12′.

Folosind tabelele de logaritmi *Dupuis,* formulele (16), (17), (18) și (19) devin:

$\log sp\,15^0,12' = \bar{1},41861 - \bar{1},93840 - 0,150515 =$

$\bar{1},41861 + 0,06160 + \bar{1},849485 = \bar{1},32969$,

$\log cp\,15^0,12' = \bar{1},98453 - \bar{1},93840 - 0,150515 =$

$\bar{1},98453 + 0,06160 + \bar{1},849485 = \bar{1},89561$,

$\log Sp\,15^0,12' = 0,10439$, $\log Cp\,15^0,12' = 0,67031$.

Avem astfel logaritmii ceruți.

Observare. Procedând ca în exemplul tratat, am construit tabele de logaritmi numai pentru $sp\,\alpha$ și $cp\,\alpha$ din minută în minută, fiindcă pentru $Sp\,\alpha$ și $Cp\,\alpha$ folosim cu ușurință relațiile (18) și (19).

Aceste tabele de logaritmi le dăm la sfârșitul acestei lucrări.

(Va urma)

NOTE MATEMATICE

20. — *Quelques égalités multigrades d'un ordre élevé.*

D'une égalité multigrade, vraie pour $p = 1,3,\ldots 13$, donnée par M. *Moessner* (Math. Zeitschrift, 1936, S. 339—44) je déduis successivement les suivantes:

A) $(1, 3, 8, 12, 13, 20, 24, 24, 26, 34, 35, 38, 40, 45, 47, 49, 49, 61, 62, 63, 66)^p = (5, 7, 10, 11, 14, 16, 18, 28, 30, 32, 36, 39, 41, 42, 43, 51, 53, 57, 64, 64, 65)^p$,

$(p = 2, 4, \ldots 14)$,

avec 21 termes par membre.

$S_2 = 32.966$ etc.

B) $(1, 4, 5, 6, 18, 18, 20, 22, 27, 29, 32, 33, 41, 43, 43, 47, 54, 55, 59, 64, 66, 68, 70, 75, 79, 80, 87, 91, 91, 93, 101, 102, 105, 107, 112, 114, 116, 116, 128, 129, 130, 133)^p = (2, 3, 3, 10, 14, 16, 24, 25, 26, 28, 31, 35, 37, 39, 49, 51, 53, 56, 57, 60, 62, 72, 74, 77, 78, 81, 83, 85, 95, 97, 99, 103 106, 108, 109, 110, 118, 120, 124, 131, 131, 132)^p$,

$(p = 1, 2, \ldots 14, 15)$,

avec 42 termes par membre.

$S_1 = 2.814$, $S_2 = 254.470$ etc.

Je signale que dans l'*„American Math. Monthly"*, 1937, p. 616, on indique 50 comme nombre minimum de termes par membre auquel on a pu arriver pour une égalité multigrade vraie aux 15 premiers degrés. Dans notre exemple il y a encore 8 termes en moins.

A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică,* anul XLIV, No. 3, Noemvrie 1938. Configurația numerelor prime (urmare și sfârșit). de *G. Zapan.* Asupra reprezentării analatice a ariilor și liniilor poligonale (urmare și sfârșit), de *N. O. Zaharia.* Din geometria triunghiului, de *V. Thébault.* Asupra suprafețelor *Țiteica,* de *Gh. Th. Gheorghiu.* Raport asupra premiului *„Vasile Conta"*, de *O. Onicescu, P. Sergescu* și Cpt. C-dor *Gr. Zapan.* Note matematice, probleme rezolvate și propuse.

2. *Boletin Matematico,* anul XI, No. 15, Octomvrie 1938, Buenos Aires. † Inginerul Dr. *Ignacio Aztiria,* de *B. I. Baidaff.* O generalizare a ecuației diferențiale omogene, de *S. Sispanov.* O generalizare a ecuației diferențiale omogene, de *M. O. Gonzales.* Soluții în numere întregi a lanțului multigrad, $A_1^x + B_1^x + (A_1 + B_1)^x = A_2^x + B_2^x + (A_2 + B_2)^x = \cdots = A_t^x + B_t^x + (A_t + B_t)^x$, $(x = 2, 4)$ pentru $t=2$, $2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots$, de *A. Gloden.*

3. *Boletin Matematico,* anul XI, No. 16. Câteva patrate curioase, de *A. Gloden.* Diverse. Probleme rezolvate şi propuse

4. *Ştiinţă şi Progres,* Revista ştiinţifică a liceelor militare, anul IV, No. 3, Noemvrie 1938. Teoreme asupra triunghiului, de Prof. *Cezar Ivănescu.* Mişcarea browniană şi numărul lui *Avogadro,* de Prof. *Ion Lungu.* Nemurirea protozoarelor, de Ing *Ion Mălăcea.* Publicaţii noui. O ţară a muncii: Danemarca, de Prof. *George Janet.* Probleme rezolvate şi propuse.

5. *Pitagora,* Revista de Matematici, anul IV, No. 1, Octomvrie 1938. Rezultatul concursului pe anul 1937—1938, Despre cercul lui *Euler,* de *N. M.* Probleme propuse şi rezolvate.

6. *Pitagora,* anul IV, No. 2. Noemvrie 1938. Asupra triunghiurilor care au acelaş centru de greutate, de *C. Cosniţa.* Asupra formulei binomului, de *E. Vişa.* Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

7. *Dr. Erich Stern.* Über irreguläre Pandiagonale Lateinische Quadrate mit Primzahlseitenlänge, und ihre Bedeutung für das *n*-Königinnenproblem sowie für die Bildung magischer Quadrate.

8. *Constantin D. Busilă.* Formarea inginerilor.

9. *Gh. Th. Gheorghiu.* Asupra suprafeţelor *Ţiteica.* (Extras din „Gazeta Matematică", No. 2, 1938).

10. *Gh. Th. Gheorghiu.* Sur les réseaux à invariants égaux. (Extrait du „Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara, Tome 8, fasc. 3–4).

11. *Gh. Th. Gheorghiu.* Memoriu de titluri şi lucrări.

PROBLEME REZOLVATE

176. — *Să se calculeze în ce zi a săptămânei şi-a făcut Mihai Viteazul intrarea triumfală în Alba-Iulia şi câte zile au trecut de atunci până la încoronarea M. S. Regelui Ferdinand I.*

GR. ZAPAN

Cărţile ge istorie sunt de acord în a spune că *Mihai Viteazul* a întrat în *Alba-Iulia* la 1 Noemvrie 1599. Nu precizează însă nici una, după care calendar este socotit acest *1 Noemvrie.*

In faţa acestei impreciziuni, şi în lipsa unui document autentic pe care să-l fi văzut cu ochii, vom răspunde curiozităţei propunătorului problemei în fiecare din cele două ipoteze posibile ale calendarului creştin.

1°. Presupunem că *Mihai Viteazul a intrat în Alba-Iulia la 1 Noemvrie 1599 st. v.* (Iulian).

Să calculăm întâi câte zile sunt de la 1 Noemvrie 1599 st. v. la 2 Oct. 1922 st. v. (sau ceia ce este tot una cu 15 Oct. 1922 st. n.), data încoronărei *Regelui Ferdinand I.*

De la 1. XI. la 31. XII. 1599 sunt 61 de zile, inclusiv 1 Noemvrie.

De la 1. I. 1600 la 31. XII. 1921 sunt 322 de ani, din care 81 ar trebui să fie bisecţi, dar ţinând seama de hotărârea Papei *Grigore XIII.* (Papă de la 1572 la 1585) ca la fiecare 4 secole să se reducă 3 ani bisecţi, rezultă că din cei 322 de ani 78 sunt bisecţi şi 244 sunt ordinari. Deci avem în acest timp

$$78 \times 366 + 244 \times 365 = 117.608$$

de zile.

De la 1. I. la 2 Oct. 1922 inclusiv, sunt 275 de zile.

In total de la 1 Noemvrie 1599 la 2 Oct. 1922 st. v. sunt

$$61 + 117608 + 275 = 117944$$

de zile.

Se ştie cu preciziune (a se vedea *Revista Matematică din Timişoara* Vol. II. pag. 115) că încoronarea *Regelui Ferdinand I.* la Alba-Iulia a avut loc Duminecă 15 Oct. st. n. deci *Duminecă 2 Oct.* st. v.

De oarece de la o *Duminecă* inclusiv, la alta exclusiv sunt 7 zile şi de oarece

$$117944 = 7 \times 16849 + 1$$

înseamnă, că plecând de Dumineca 2 Oct. st. v. 1922 spre înapoi până la *1 Noemvrie 1599* st. v., această dată va fi căzut în prima zi înaintea unei Duminici, adică într'o Sâmbătă.

Deci în ipoteza că *Mihai Viteazul* a intrat în *Alba-Iulia* la 1 Noemvrie 1599 st. v., răspunsul la întrebarea propunătorului este:

Intrarea triumfală a lui Mihai Viteazul în Alba Iulia a fost Sâmbătă 1 Noemvrie 1599 st. v. de atunci şi până la încoronarea Regelui Ferdinand I. au trecut 117944 zile.

2°. Presupunem că *intrarea triumfală a lui Mihai Viteazul în Alba Iulia a fost la 1 Noemvrie 1599 st. n.* (Gregorian).

In anul 1599 şi în tot cursul secolului XVI, diferenţile între datele aceleiaşi zile între cele 2 calendare era de 9 zile. Adică *1 Noewvrie st. v.* este tot una cu *23 Octomvrie st. n.* şi cum am văzut

la 1° că 1 Noemvrie st. n. a fost într'o Sâmbătă, rezultă că *23 Octomvrie st. n.* a fost într'o Joi şi deci în cazul 2°. intrarea lui *Mihai Viteazul* în Alba-Iulia a fost *Joi* 1 Noemvrie/23 Octomvrie 1599.

Este evident că în cazul 2°. între cele două evenimente istorice s-au scurs

$$117944 + 9 = 117953$$

de zile.

Notă. La această problemă s-au primit 35 soluţiuni cu aproape tot atâtea rezultate, ceiace nu este de mirare dat fiind că problema calendarului este foarte încurcată. Nu ne-ar mira ca în raţionamentul bun precedent să se fi strecurat vre-o eroare, datorită vre unei dispoziţiuni caracteristice necunoscută nouă.

Rezolvitorii problemei s-au pus numai în ipoteza 2°. şi au găsit rezultate care urmează, numerele din paranteze arătând răspunsurile la întrebarea a doua a enunţului:

Luni, d-nii: *Bogdan M.* (117962), *Brădeţeanu C. C.* (117959), *Dordea A. Tr.* (117952), *Dragomirescu B. Ed.* (117956), *Grofşoreanu Gh.* (117655), *Popescu N. C.* (117593), *Popovici Th. I.* (117603), *Popovici Chr. J.* (117959) şi *Rozini M.* (117992).

Marţi, d-nii: *David Gh.* (117958), *Grünfeld M.* (117661), *Mitran St. Gr.* (117959), şi *Răuţ C.* (117703).

Miercuri, d-nii: *Miclescu Ad.* (117956), şi *Scripcă L.* (117959).

Joi, d-nii: *Angelescu N. Tr.* (117584), *Iliescu Em.* (117652), *Kassagian A.* (117945), *Marinescu I. I.* (117582), şi *Vasiliu C. I.* (117610).

Vineri, d-nii: *Cristea Gh. A.* (117959), *Dospinescu N.* (117951), *Munteanu L.* (117928) şi *Wagner W. J.* (117581).

Sâmbătă, d nii: *Brătescu H. M.* (117945), *Dumitrescu G. M.* (117809), *Ionescu I. N,* (117945), *Katz P.* (117945) şi *Weiss L.* (117579).

Duminecă, d-nii: *Ciorănescu I. C.* (117957), *Georgescu-Val N. I.* (117956), *Katz S.* (117975), *Măru D.* (117959) şi *Niculescu I.* (117937).

Se vede un mare dezacord între corespondenţi. Ziua de Luni a obţinut cele mai multe sufragii şi cea de Miercuri cele mai puţine.

Ceia ce ne încurcă şi mai mult asupra adevărului istoric este că în ultimul timp am citit următoarele:

In ziarul *„Universul"* No. 180 din 3 Iulie 1938 se relatează solemnitatea înălţări la gradul de Sub-Locotenent la 1 Iulie 1938 la Sibiu. Fostul Ministru al Apărării Naţionale, d-l G-l *G. Argeşeanu* spune în discursul său că victoria lui *Mihai Viteazul* asupra ungurilor la *Şelimbar* a fost repurtată în ziua de *„Joi 18 Oct. 1599"*. Socotim că 2 săptămâni au fost suficiente pentru ca apoi *Joi 1 Noemvrie* să poată intra triumfal în *Alba-Iulia*. In acest caz sau suntem în ipoteza 2°. a soluţiei sau au dreptate cei 5 corespondenţi care au dat ca rezultat ziua de Joi.

Dar lucrurile se complică prin aceia că ziarul *„Universul"* No. 181 din 4 Iulie (abia după o zi deci) publică o dare de seamă a serbărilor făcute de societatea *„Târnava Mică"* care a comemorat 337 de ani de la intrarea lui *Mihai Viteazul* în *Alba-Iulia*. Cuvântătorii de la această serbare, d-nii *I. Căbăşanu* şi *M. E. Goga* au spus în discursurile lor ocazionale că *„... la 1 Iulie 1601 Mihai Viteazul a intrat în falnica cetate Alba-Iulia ..."*.

In faţa atâtor nepotriviri între afirmaţiunile istoricilor nu se poate satisface curiozitatea propunătorului de cât când vom vedea un document autentic din timpul lui *Mihai Viteazul*. Din acest punct de vedere şi pentru acest motiv, nu înlăturăm rezultatele numerice ale diferitelor soluţii de cât atunci când raţionamentul matematic este greşit.

G-l Gh. B.

1437. — *Fie* M *un punct mobil pe cercul de diametru fix* A B. *Tangentele în* M *şi* B *la cerc se întâlnesc în* N. *Dreapta* A N *taie cercul a doua oară în* C. *Se cere locul punctului de intersecţie al tangentei în* C *la cerc cu* M N.

G-L GH. BUICLIU

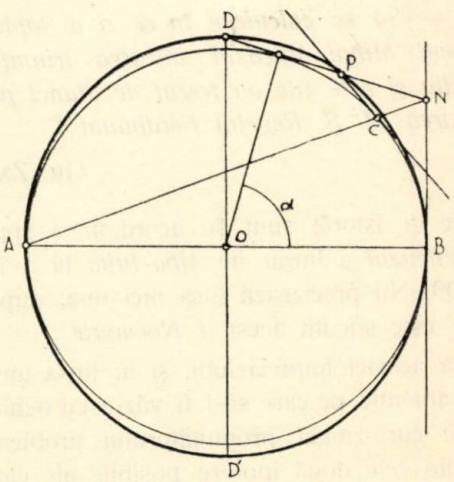
Luăm pe A B ca axă de x şi originea de coordonate în centrul O al cercului a cărui rază o notăm cu R. Dacă α este unghiul variabil M O x atunci

$$A(-R, 0); \qquad B(R, 0)$$

(O) $$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

(B N) $$x - R = 0$$

(M N) $$x\cos + y\sin\alpha - R = 0.$$



Rezolvând sistemul de ecuaţii (B N), (M N) se găseşte

$$N\left[R; \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} R\right],$$

sau ţinând seamă că

$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ şi $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$,

$$N\left[R, R\,tg\frac{\alpha}{2}\right].$$

Având coordonatele lui A şi N găsim

(A N) $$y=\frac{1}{2}tg\frac{\alpha}{2}(x+R).$$

Rezolvind sistemul (O), (A N) se găseşte

$$C\left[R\frac{4-tg^2\frac{\alpha}{2}}{4+tg^2\frac{\alpha}{2}},\ \frac{4R\,tg\frac{\alpha}{2}}{4+tg^2\frac{\alpha}{2}}\right]$$

şi se găseşte următoarea ecuaţie pentru C P

$$R\frac{4-tg^2\frac{\alpha}{2}}{4+tg^2\frac{\alpha}{2}}x+\frac{4R\,tg\frac{\alpha}{2}}{4+tg^2\frac{\alpha}{2}}y-R^2=0,$$

sau după simplificări

(C P) $$\left(4-tg^2\frac{\alpha}{2}\right)x+4\,tg\frac{\alpha}{2}\,y=R\left(4+tg^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

In ecuaţia (M N) înlocuim pe $\sin\alpha$ şi $\cos\alpha$ în funcţie de $tg\frac{\alpha}{2}$ şi găsim

1) $$\left(1-tg^2\frac{\alpha}{2}\right)x+2y\,tg\frac{\alpha}{2}=R\left(1+tg^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

Acum rămâne să se elimine $tg\frac{\alpha}{2}$ între (1) şi (CP) Scădem ecuaţia (1) din (C P) şi obţinem

$$3x+2y\,tg\frac{\alpha}{2}=3R$$

** $$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{3R-3x}{2y}.$$

Ducând această valoare în (1) se găseşte locul ui P. Avem ca rezultat al acestei substituţii

$$(R-x)(9x^2+8y^2-9R^2)=0.$$

De unde se deduce dreapta

$$x-R=0,$$

care nu face parte din loc căci C P, M N, B N nu sunt concurente de cât când M este în B, şi elipsa

$$9x^2+8y^2-9R^2=0$$

sau

$$\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{\frac{9R^2}{8}}-1=0.$$

Se vede că această elipsă este concentrică cu O şi că are axele egale respectiv cu $\frac{3R}{\sqrt{2}}$ şi 2 R. Axa mare este egală cu $\frac{2}{3}$ din latura patratului înscris în O.

Notă. 1°. Au dat această soluţie d-nii: *Marica I. H.* (lic. Bariţiu, Cluj), *Mocanu N. V.* şi *Roman I. E.* (lic Militar, Cernăuţi.

2°. D-l *Mişca C. Kivu* (lic. Unirea, Focşani) a dat o soluţie foarte bună luând ca parametrii variabili coordonatele x_0, y_0 ale punctului M.

3°. S-a primit şi o foarte bună soluţie geometrică de la D-şoara *Naneş Cornelia* (Studentă, Bucureşti). Fiind dată calitatea acestei soluţii ca fond şi originalitate o vom publica fără nici o schimbare sub formă de articol în unul din numerele următoare. Trebue să adăugăm că soluţia d-şoarei *Naneş Cornelia* este impecabilă şi din punctul de vedere al acurateţei şi formei în care este prezentată, şi dacă mijloacele technice ne-ar permite, am fotografia-o, ca model de stil, logică şi acurateţă.

G-l Gh. B.

1649. — *Să se afle numărul de patru cifre în care suma cifrelor sale este egală cu numărul format de primele două cifre, iar diferenţa între inversul său şi el este egală cu 90.*

LT. MIHAI C I. VLAD

Fie $N=abcd$ numărul cerut, a, b, c, d fiind cifrele sale.

Aceste cifre trebuie să satisfacă condiţiile:

(1) $$a+b+c+d=10a+b$$

(2) $$(1000d+100c+10b+a)-(1000a+100b+10c+d)=90$$

sau:

$$999(d-a)+90(c-b)=90.$$

Această relație se mai poate scri:

$$3 \cdot 37 \cdot (d-a) = 2 \cdot 5 \, (b+1-c),$$

37 fiind prim, ar trebui să dividă unul din factorii din membru al 2-lea ceiace nu se poate. Această egalitate nu este verificată de cât pentru: $d = a$, $c = b+1$, astfel că numărul cerut este:

$$N = a\,b\,(b+1)\,a.$$

Relația (1) în acest caz devine

$$2a + 2b + 1 = 10a + b,$$

sau:

$$8a - b = 1.$$

Această relație este satisfăcută numai pentru

$$a = 1, \qquad b = 7.$$

Avem deci singura soluție

$$N = 1781.$$

Soluții date de d-nii: *Buznea D. Dinu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Cristescu Dan* (lic. Brașov), *Gligor N. Ioan* (lic. Arad), *Gloden A.* (Luxembourg), *Modâlcă S. Emil* (lic. T. Severin), *Moldovan Cornel* (Tg-Mureș), *Segal Zigu* (Vaslui), *Slavov Iacob* (Bolgrad), *Stefănescu Marin* (Sub-Lt) *Stoenescu D. Mirel* (lic. Milit, N. Filipescu) și *Tilică C. Ștefan* (lic. T-Severin).

PROBLEME PROPUSE

1728. — Să se găsească numărul N al cărui patrat se obține scriind $N + 2$ după $N - 20$.

G-L GH BUICLIU

1729. — Să se găsească un patrat perfect de forma $\overline{a\,b\,a\,c\,a}$, în care $b = a + c$, iar ac este patrat perfect.

SUB-LT MARIN STEFANESCU

1730. — Două trenuri A și B trec unul pe lângă altul în sensuri opuse. Un călător din trenul A observă că trenul B trece prin fața lui în timp de 4,5 sec., totodată observă că timpul între două loviturі consecutive ce se produc la capătul șinei de 6 metri lungime este 1,08 sec. Lungimea trenului B este de 100 de metri. Se cer vitezele celor două trenuri.

A BARGLAZAN

1731. — Să se stabilească identitatea

$$\begin{vmatrix} K_m^n & K_m^{n-1} \cdots K_m^{n-m+1} \\ K_m^{n-1} & K_m^{n-2} \cdots K_m^{n-m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K_m^{n-m+1} & K_m^{n-m} \cdots K_m^{n-2m+2} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(m-1)(m+4)}{2}},$$

în care m, n sunt întregi pozitivi, $n \geq 2(m-1)$, iar K_p^r reprezintă numărul combinărilor cu repetiție a p obiecte luate câte r. (Generalizarea problemei 1101, anul XIII, p. 82).

M. GHERMANESCU

1732. — Să se rezolve în numere întregi sistemul:

$$\begin{cases} x + a\,y = u^2 \\ x^2 + b\,x\,y + a\,y^2 = v^2. \end{cases}$$

A. GLODEN

1733. — Să se construiască un triunghiu A B C cunoscându-se latura b, unghiul $A < 90^0$ și ale cărui laturi verifică relația $3\,(a^2 - b^2) = c^2$.

N ANITESCU

1734. — Să se stabilească relațiile:

$$(1+i)^k + (1-i)^k = 2^{1+\frac{k}{2}} \cos \frac{k\pi}{4}$$

$$(1+i)^k - (1-i)^k = 2^{1+\frac{k}{2}} \sin \frac{k\pi}{4},$$

unde $i = \sqrt{-1}$.

V. ALACI

1735. — Să se arate că în orice triunghiu există relația:

$$\frac{c^2 \sin 2A + 2(a^2 - b^2) \sin C - c^2 \sin 2B}{c^2 \sin 2B + 2(a^2 - b^2) \sin C - c^2 \sin 2A} = \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}.$$

SUB-LT MIRCEA GRUMAZESCU

Complectare. In problema 1725, în rândul al 2-lea, în loc „triunghiului A B C“ se va ceti: triunghiului dreptunghic A B C.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Andrievici N. (1691); *Bârlea V. Suhăţeanu* (1692, 1707); *Borneas Marius* (1664, 1669, 1683, 1688, 1690, 1699, 1701, 1726); *Buznea D. Dinu* (1655, 1664, 1665, 1667, 1673, 1688, 1690, 1691, 1693, 1696, 1697, 1698, 1699, 1700, 1701, 1702); *Cerchez Mihu* (P.); *Ciceiu Cosmin Cetate* (1669, 1683, 1707); *Cernat Camil* (1606, 1683, 1703); *Cetăţeanu Stelian* (P., 1602, 1666, 1682, 1704); *Checian N. Ana* (1697, 1698, 1699, 1726); *Constantinescu N. Virgil* (1473, 1574, 597, 1616, 1707); *Cristea I C-tin* (1690, 1697, 1698, 1707); *Cristea I. Nicolae* (P., 1659, 1674, 1681, 1683, 1697, 1704, 1705, 1726); *Cristescu Dan* (1574, 1659, 1681, 1683, 1684, 1689, 1690, 1704); *Dăscălescu Şt. Hristache* (P., 1475, 1596, 1661, 1665, 1667, 1691, 1694, 1695, 1713, 1714); *Diaconescu D. Ion* (1693, 1696, 1702, 1703, 1726); *Dragon I. Gheorghe* (1664, 1665, 1667, 1673); *Gligor N. Ion* (P., 1696); *Enescu D. D-tru* (1727); *Jidanu I. C-tin* (1582, 1640, 1644, 1647, 1648, 1688, 1704, 1707, 1710, 1717, 1719); *Lupescu Corneliu* (P., 1611, 1616, 1648, 1681, 1704); *Matei I. Augustin* (P., 1574, 1605, 1675, 1681, 1682 1683, 1688, 1689, 1690, 1692, 1697, 1699, 1701, 1704, 1719); *Modâlca S. Emil* (P., 1586, 1666, 1704, 1710, 1712); *Mureşan I. O.* (1687, 1726); *Musca M. Miron* (1687); *Papadopol D. Elena* (1692, 1693); *Rădulescu R. Alexandru* (1529, 1616, 1659, 1674, 1699, 1707); *Roboiu Gh. Nicolae* (1681)); *Schapira Salo* (1683, 1684, 1704); *Segal Zigu* (1704, 1707, 1710, 1712, 1725, 1726); *Şerban C. C-tin* (1692); *Staicu I. N.*, (1663, 1692, 1699, 1703, 1707); *Stamate I. Ionel* (N. P., 1493, 1605, 1614, 1617, 1622, 1675, 1677, 1692, 1698, 1702, 1704, 1707, 1710, 1719, 1727); *Stoenescu D. Mirel* (1640, 1657); *Tătaru Alexandru* (P., 1587, 1597, 1674, 1684, 1707, 1718, 1720); *Ţica P. Marin-Gall* (P., 1727); *Todoran G. Gheorghe* (1687, 1699, 1726, 1727); *Vijelie Gh. Eugen* (P., 1684, 1692, 1700).

INFORMAŢIUNI

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL XI-LEA

care a început în Martie 1938.

Costul *special* a unui abonament este de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Pentru anul al XI, care a inceput în Martie 1938, s'a primit până acum la Redacţia „R. M. T." următorul abonament:

1. *Prof. Sergescu P.*, Universitatea, Cluj.
2. *Eugen Grabovschi*, Orhei - Basarabia, Strada I. C. Brătianu 14.
3. *Ştefan Musta*, profesor, Beiuş - Bihor Str. Pavel 4.

A APĂRUT IN BIBLIOTECA GAZETEI MATEMATICE:

CULEGERE DE PROBLEME DE TRIGONOMETRIE

Partea II,

Preţul 125 Lei — TRIGONOMETRIA PLANĂ

Acei care se interesează de identităţile în numere întregi de diferite grade, în special cu problemele *Tarry*, sunt rugaţi a intra în corespondenţă cu mine, *Alfred Moessner* Nürnberg (Germania), Grolandstrasse 79.

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS:
1 an: Belgique, **30 fr.** France, **25** fr.
Etranger, 7 **belgas**

Administration:
SPHINX, Bruxelles 173, Avenue Longchamp

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

ANUL XVIII. 15 IANUARIE 1939 No. 11.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. ALACI: TRIGONOMETRIA PATRATICA.
2. NOTE MATEMATICE: 21.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 91, 1372
5. PROBLEME PROPUSE: 1736-1743.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu,** Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVIII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVIII inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XVIII — No. 11 TIMISOARA, 15 IANUARIE 1939

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

TRIGONOMETRIA PĂTRATICĂ.

DE
V. ALACI
PROFESOR

(urmare)

FORMULE DE ADIŢIUNE

20. Ne propunem a găsi formulele care ne dau *funcţiunile patratice* a sumei algebrice a unor arce, când cunoaştem *funcţiunile patratice* ale acelor arce. Vom trata numai câteva cazuri caracteristice.

Cazul sumei a două arce.

I. *Dacă arcele pozitive* α *şi* β *satisfac condiţia*

$$0<\alpha+\beta\leq\frac{\pi}{2},$$

avem următoarele formule de adiţiune:

$$(20)\qquad \boxed{sp(\alpha+\beta)=\frac{sp\,\alpha+sp\,\beta-2\,sp\,\alpha\,sp\,\beta}{1-2\,sp\,\alpha\,sp\,\beta}},$$

$$(21)\qquad \boxed{cp(\alpha+\beta)=\frac{cp\,\alpha+cp\,\beta-1}{1-2(1-cp\,\alpha)(1-cp\,\beta)}},$$

$$(22)\qquad \boxed{Sp(\alpha+\beta)=2+\frac{Sp\,\alpha\,Sp\,\beta-2}{Sp\,\alpha+Sp\,\beta-Sp\,\alpha\,Sp\,\beta}},$$

$$(23)\qquad \boxed{Cp(\alpha+\beta)=\frac{Cp\,\alpha\,Cp\,\beta-2}{Cp\,\alpha+Cp\,\beta-2}}.$$

Demonstraţie. 1°. Prima relaţie din tabloul (11) ne permite a scri:

$$sp(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{1+\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}.$$

Dezvoltând membrul al 2-lea avem succesiv:

$$sp(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha(1+\operatorname{tg}\beta)+\operatorname{tg}\beta(1+\operatorname{tg}\alpha)-2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)-2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Impărţind termenii ultimii fracţii prin produsul $(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)$ şi ţinând seamă că,

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=sp\,\alpha,\qquad \frac{\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\beta}=sp\,\beta,$$

obţinem:

$$sp(\alpha+\beta)=\frac{sp\,\alpha+sp\,\beta-2\,sp\,\alpha\,sp\,\beta}{1-2\,sp\,\alpha\,sp\,\beta}.$$

Formula (20) este astfel stabilită.

2°. Arcele $\alpha,\beta,\alpha+\beta$ conform ipotezei fiind în primul cadran, formula (4) ne permite a transforma formula (20) stabilită, astfel:

$$1-cp(\alpha+\beta)=\frac{1-cp\,\alpha+1-cp\,\beta-2(1-cp\,\alpha)(1-cp\,\beta)}{1-2(1-cp\,\alpha)(1-cp\,\beta)}.$$

De aci deducem:

$$cp(\alpha+\beta)=\frac{cp\,\alpha+cp\,\beta-1}{1-2(1-cp\,\alpha)(1-cp\,\beta)},$$

adică tocmai formula (21).

3°. Dacă în formulele (21) şi (20) stabilite, înlocuim *sinusurile* şi *cosinusurile* patratice în funcţie de *cosecantele* şi *secantele patratice* al arcelor corespunzătoare, avem respectiv:

$$\frac{1}{Sp(\alpha+\beta)}=\frac{\frac{1}{Sp\,\alpha}+\frac{1}{Sp\,\beta}-1}{1-2\left(1-\frac{1}{Sp\,\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{Sp\,\beta}\right)}.$$

$$\frac{1}{Cp(\alpha+\beta)}=\frac{\frac{1}{Cp\,\alpha}+\frac{1}{Cp\,\beta}-\frac{2}{Cp\,\alpha\,Cp\,\beta}}{1-\frac{2}{Cp\,\alpha\,Cp\,\beta}}$$

De aci deducem:

$$Sp(\alpha+\beta)=\frac{2(Sp\,\alpha+Sp\,\beta-Sp\,\alpha\,Sp\,\beta)+Sp\,\alpha\,Sp\,\beta-2}{Sp\,\alpha+Sp\,\beta-Sp\,\alpha\,Sp\,\beta}$$

$$=2+\frac{Sp\,\alpha\,Sp\,\beta-2}{Sp\,\alpha+Sp\,\beta-Sp\,\alpha\,Sp\,\beta},$$

$$Cp(\alpha+\beta)=\frac{Cp\,\alpha\,Cp\,\beta-2}{Cp\,\alpha+Cp\,\beta-2}.$$

Avem astfel stabilite formulele (22) şi (23).

Observare importantă. Formulele (20), (21), (22) *şi* (23) *invederează că funcţiunile patratice admit fiecare, formule de adiţiune raţionale în raport cu ele însăşi.*

Sinusul şi cosinul circular n'admit astfel de formule.

II. *Dacă arcele* α *şi* β *sunt în primul cadran şi satisfac condiţia*

$$\frac{\pi}{2}\leqq\alpha+\beta\leqq\pi,$$

avem următoarele formule de adiţiune.

(20′) $$\boxed{sp(\alpha+\beta)=\frac{cp\,\alpha+cp\,\beta-2\,cp\,\alpha\,cp\,\beta}{1-2\,cp\,\alpha\,cp\,\beta}},$$

(21′) $$\boxed{cp(\alpha+\beta)=\frac{1-sp\,\alpha-sp\,\beta}{1-2\,cp\,\alpha\,cp\,\beta}},$$

(22′) $$\boxed{Sp(\alpha+\beta)=\frac{2-Cp\,\alpha\,Cp\,\beta}{Cp\,\alpha+Cp\,\beta-Cp\,\alpha\,Cp\,\beta}-2},$$

(23′) $$\boxed{Cp(\alpha+\beta)=\frac{Sp\,\alpha\,Sp\,\beta-2}{Sp\,\alpha+Sp\,\beta-2}}.$$

Demonstraţie. Observăm că arcul $\pi-(\alpha+\beta)=\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$ este în primul cadran ca şi arcele $\frac{\pi}{2}-\alpha$, $\frac{\pi}{2}-\beta$ aşa că putem aplica formulele (20), (21), (22) şi (23) arcelor $\frac{\pi}{2}-\alpha, \frac{\pi}{2}-\beta$. Dacă în relaţiile astfel obţinute ţinem seamă de relaţiile (2), iar pe de altă parte de proprietatea ce o au *funcţiunile patratice* a două arce complimentare, obţinem cu uşurinţă formulele (20′), (21′), (22′), şi (23′).

III. *Dacă* α *este un arc în primul cadran şi dacă* β *şi* $\alpha+\beta$ *sunt în al 2-lea cadran, atunci avem următoarele formule de adiţiune:*

(20″) $$\boxed{sp(\alpha+\beta)=\frac{sp\,\beta-sp\,\alpha}{1+2\,sp\,\alpha\,cp\,\beta}},$$

(21″) $$\boxed{cp(\alpha+\beta)=\frac{cp\,\beta-sp\,\alpha-2\,sp\,\alpha\,cp\,\beta}{1+2\,sp\,\alpha\,cp\,\beta}},$$

(22″) $$\boxed{Sp(\alpha+\beta)=\frac{2+Cp\,\alpha\,Sp\,\beta}{Cp\,\alpha-Sp\,\beta-2}},$$

(23″) $$\boxed{Cp(\alpha+\beta)=2+\frac{Sp\,\alpha\,Cp\,\beta-2}{Sp\,\alpha+Cp\,\beta-Sp\,\alpha\,Cp\,\beta}}.$$

Demonstraţie. Observând că arcele α, $\beta-\frac{\pi}{2}$ şi $\alpha+\beta-\frac{\pi}{2}$ sunt în primul cadran, putem aplica formulele (20), (21), (22), (23) şi avem:

$$sp\left(\alpha+\beta-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{sp\,\alpha+sp\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)-2\,sp\,\alpha\,sp\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)}{1-2\,sp\,\alpha\,sp\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)},$$

$$cp\left(\alpha+\beta-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{cp\,\alpha+cp\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)-1}{1-2\,sp\,\alpha\,sp\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)},$$

$$Sp\left(\alpha+\beta-\frac{\pi}{2}\right)=2+\frac{Sp\,\alpha\,Sp\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)-2}{Sp\,\alpha+Sp\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)-Sp\,\alpha\,Sp\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)},$$

$$Cp\left(\alpha+\beta-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{Cp\,\alpha\,Cp\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)-2}{Cp\,\alpha+Cp\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)-2}.$$

Ţinând seamă de relaţiile (1) şi de proprietăţile ce au *funcţiunile patratice* a două arce complimentare, aceste relaţii devin:

$$cp(\alpha+\beta)=\frac{cp\,\beta-sp\,\alpha-2\,sp\,\alpha\,cp\,\beta}{1+2\,sp\,\alpha\,cp\,\beta},$$

$$sp(\alpha+\beta)=\frac{sp\,\beta-sp\,\alpha}{1+2\,sp\,\alpha\,cp\,\beta},$$

$$Cp(\alpha+\beta)=2+\frac{Sp\,\alpha\,Cp\,\beta-2}{Sp\,\alpha+Cp\,\beta-Sp\,\alpha\,Cp\,\beta},$$

$$Sp(\alpha+\beta)=\frac{2+Cp\,\alpha\,Sp\,\beta}{Cp\,\alpha-Sp\,\beta-2}.$$

Am obținut astfel relațiile cerute.

Cazul diferenții a două arce.

Dacă α și β sunt arce în primul cadran $(\alpha>\beta)$, avem următoarele formule.

(24) $$\boxed{sp(\alpha-\beta)=\frac{sp\,\alpha-sp\,\beta}{1-2\,cp\,\alpha\,sp\,\beta}},$$

(25) $$\boxed{cp(\alpha-\beta)=\frac{cp\,\alpha\,cp\,\beta+sp\,\alpha\,sp\,\beta}{1-2\,cp\,\alpha\,sp\,\beta}}.$$

Demonstrație. 1°. Prima relație din tabloul (11) ne permite a scrie:

$$sp(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{1+\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}.$$

Dezvoltând membrul al 2-lea avem succesiv:

$$sp(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha(1+\operatorname{tg}\beta)-\operatorname{tg}\beta(1+\operatorname{tg}\alpha)}{(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)-2\operatorname{tg}\beta}.$$

Impărțind prin produsul $(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)$ termenii ultimii fracții și ținând seamă că,

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=sp\,\alpha,\qquad\frac{\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\beta}=sp\,\beta,$$

$$\frac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha}=cp\,\alpha,$$

obținem:

$$sp(\alpha-\beta)=\frac{sp\,\alpha-sp\,\beta}{1-2\,cp\,\alpha\,sp\,\beta}.$$

Formula (24) este astfel stabilită.

2°. Dacă în relația cunoscută,

$$cp(\alpha-\beta)=1-sp(\alpha-\beta)$$

înlocuim $sp(\alpha-\beta)$ cu valoarea sa din (24), obținem după unele transformări:

$$cp(\alpha-\beta)=1-\frac{sp\,\alpha-sp\,\beta}{1-2\,cp\,\alpha\,sp\,\beta}=$$

$$\frac{cp\,\alpha+sp\,\beta-2\,cp\,\alpha\,sp\,\beta}{1-2\,cp\,\alpha\,sp\,\beta}=\frac{cp\,\alpha\,cp\,\beta+sp\,\alpha\,sp\,\beta}{1-2\,cp\,\alpha\,sp\,\beta}.$$

Avem astfel stabilită formula (25).

ALTE FORMULE DE ADIȚIUNE.

21. *Dacă α, β, γ sunt arce în primul cadran și încă*

$$0<\alpha+\beta+\gamma\leq\frac{\pi}{2},$$

avem următoarele formule de adițiune.

(26) $$\boxed{sp(\alpha+\beta+\gamma)=1+\frac{sp\,\alpha+sp\,\beta+sp\,\gamma-2\,sp\,\alpha\,sp\,\beta\,sp\,\gamma-1}{1-2\,sp\,\alpha\,sp\,\beta-2\,sp\,\beta\,sp\,\gamma-2\,sp\,\gamma\,sp\,\alpha+4\,sp\,\alpha\,sp\,\beta\,sp\,\gamma}}$$

(27) $$\boxed{cp(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{1-sp\,\alpha-sp\,\beta-sp\,\gamma+2\,sp\,\alpha\,sp\,\beta\,sp\,\gamma}{1-2\,sp\,\alpha\,sp\,\beta-2\,sp\,\beta\,sp\,\gamma-2\,sp\,\gamma\,sp\,\alpha+4\,sp\,\alpha\,sp\,\beta\,sp\,\gamma}}.$$

Demonstrație. 1°. Arcele $\alpha+\beta$, γ fiind în primul cadran și suma lor de asemenea, putem aplica formula (20) și avem:

$$sp[(\alpha+\beta)+\gamma]=\frac{sp(\alpha+\beta)+sp\,\gamma-2\,sp(\alpha+\beta)sp\,\gamma}{1-2\,sp(\alpha+\beta)sp\,\gamma}$$

$$=1+\frac{sp(\alpha+\beta)+sp\,\gamma-1}{1-2\,sp(\alpha+\beta)\,sp\,\gamma}.$$

Dezvoltând mai departe pe $sp(\alpha+\beta)$ tot după formula (20) și făcând unele simplificări, obținem relația (26).

2°. Formula (27) se stabilește imediat, observând că,

$$cp(\alpha+\beta+\gamma)=1-sp(\alpha+\beta+\gamma).$$

Observare. Analog putem trata cazul a mai multor arce.

FORMULE DE INMULȚIRE.

22. I. *Dacă în formulele* (20), (21), (22) *și* (23) *luăm $\beta=\alpha$, obținem următoarele formule de înmulțire:*

(28) $$\boxed{sp\,2\alpha = \frac{2\,sp\,\alpha\,cp\,\alpha}{1-2\,sp^2\,\alpha}},$$

(29) $$\boxed{cp\,2\alpha = \frac{1-2\,sp\,\alpha}{1-2\,sp^2\,\alpha}},$$

(30) $$\boxed{Sp\,2\alpha = 2 + \frac{Sp^2\,\alpha - 2}{Sp\,\alpha\,(2 - Sp\,\alpha)}},$$

(31) $$\boxed{Cp\,2\alpha = \frac{Cp^2\,\alpha - 2}{2\,(Cp\,\alpha - 1)}}.$$

Aceste formule sunt valabile numai pentru $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ și în general pentru $\alpha + 2k\pi$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

II. *Dacă în formulele* (20′), (21′), (22′) *și* (23′) *luăm* $\beta = \alpha$, *obținem următoarele formule de înmulțire:*

(28′) $$\boxed{sp\,2\alpha = \frac{2\,sp\,\alpha\,cp\,\alpha}{1-2\,cp^2\,\alpha}},$$

(29′) $$\boxed{cp\,2\alpha = \frac{1-2\,sp\,\alpha}{1-2\,cp^2\,\alpha}},$$

(30′) $$\boxed{Sp\,2\alpha = \frac{2 - Cp^2\,\alpha}{Cp\,\alpha\,(2 - Cp\,\alpha)} - 2},$$

(31′) $$\boxed{Cp\,2\alpha = \frac{Sp^2\,\alpha - 2}{2\,(Sp\,\alpha - 1)}}.$$

Aceste formule sunt valabile numai pentru $\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ și în general pentru $\alpha + 2k\pi$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

III. *Dacă în formulele* (26) *și* (27) *luăm* $\gamma = \beta = \alpha$, *obținem următoarele formule de înmulțire:*

(26′) $$\boxed{sp\,3\alpha = \frac{3\,sp\,\alpha - 6\,sp^2\,\alpha + 2\,sp^3\,\alpha}{1 - 6\,sp^2\,\alpha + 4\,sp^3\,\alpha}},$$

(27′) $$\boxed{cp\,3\alpha = \frac{1 - 3\,sp\,\alpha + 2\,sp^3\,\alpha}{1 - 6\,sp^2\,\alpha + 4\,sp^3\,\alpha}},$$

Aceste formule sunt valabile numai pentru $0 < \alpha \leq 30^0$ și $\alpha + 2k\pi$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

VALORILE NUMERICE PENTRU FUNCȚIUNILE PATRATICE A CÂTORVA ARCE.

23. I. *Să se calculeze funcțiunile patratice ale arcelor de* 15^0 *și* 75^0.

1°. In formula (26′) luăm $\alpha = 15^0$ și fiindcă $sp\,45^0 = \frac{1}{2}$, obținem,

$$\frac{1}{2} = \frac{3\,sp\,15^0 - 6\,sp^2\,15^0 + 2\,sp^3\,15^0}{1 - 6\,sp^2\,15^0 + 4\,sp^3\,15^0},$$

sau:

$$6\,sp^2\,15^0 - 6\,sp\,15^0 + 1 = 0.$$

De aci deducem, luând soluția convenabilă:

(32) $$\boxed{sp\,15^0 = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} = cp\,75^0}.$$

2°. Cum,

$$cp\,15^0 = 1 - sp\,15^0,$$

rezultă:

(33) $$\boxed{cp\,15^0 = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} = sp\,75^0}.$$

3°. Avem încă:

(34) $$\boxed{Sp\,15^0 = \frac{1}{cp\,15^0} = 3 - \sqrt{3} = Cp\,75^0}$$

(35) $$\boxed{Cp\,15^0 = \frac{1}{sp\,15^0} = 3 + \sqrt{3} = Sp\,75^0}.$$

II. *Să se calculeze funcțiunile patratice ale arcelor de* 30^0 *și* 60^0.

1°. Dacă în formula (28) luăm $\alpha = 15^0$ și ținem seamă de valorile găsite pentru $sp\,15^0$ și $cp\,15^0$, obținem:

(36) $$\boxed{sp\,30^0 = \frac{2\,\frac{3-\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{6}}{1 - 2\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} = cp\,60^0}.$$

2°. Cum,

$$cp\,30^0 = 1 - sp\,30^0.$$

rezultă:

(37) $$\boxed{cp\,30^0 = \frac{3-\sqrt{3}}{2} = sp\,60^0},$$

3°. Avem încă:

(38) $$\boxed{Sp\,30^0 = \frac{1}{cp\,30^0} = \frac{2}{3-\sqrt{3}} = 1+\frac{1}{\sqrt{3}} = Cp\,60}$$

(39) $$\boxed{Cp\,30^0 = \frac{1}{sp\,30^0} = 1+\sqrt{3} = Sp\,60^0},$$

III. *Să se calculeze funcțiunile patratice ale arcelor de 22°, 30′ și 67°, 30′.*

1°. Avem succesiv:

(40) $$\boxed{Sp\,22^0,30' = 1+\operatorname{tg}22^0,30' = \sqrt{2} = Cp\,67^0,30'}$$

(41) $$\boxed{Cp\,22^0,30' = 1+\operatorname{cotg}22^0,30' = 2+\sqrt{2} = Sp\,67^0,30'}.$$

2°. Putem scri încă:

(42) $$\boxed{sp\,22^0,30' = \frac{1}{Cp\,22^0,30'} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} = cp\,67^0,30'}$$

(43) $$\boxed{cp\,22^0,30' = \frac{1}{Sp\,22^0,30'} = \frac{\sqrt{2}}{2} = sp\,67^0,30'}.$$

DERIVATELE FUNCȚIUNILOR PATRATICE.

24. Vom stabili întâi propoziţiunea auxiliară:

Limita raportului dintre sinusul patratic al unui arc şi însuşi arcul, tinde către unitate când arcul tinde către zero.

Fie α un arc în primul cadran; atunci putem scri observând (fig. 1.):

$$sp\,\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha \qquad \text{(fiindcă, } sp\,\alpha < \sin\alpha\text{)}$$

Impărțind prin $sp\,\alpha$ obținem:

$$1 < \frac{\alpha}{sp\,\alpha} < \frac{1}{cp\,\alpha}.$$

Când α tinde către zero, $\frac{1}{cp\,\alpha}$ tinde către 1, astfel că,

(44) $$\boxed{\lim_{\alpha=0}\frac{sp\,\alpha}{\alpha} = 1},$$

şi propoziţiunea enunţată este stabilită.

Derivata funcţiunii $y = sp\,x$.

25. *Derivata funcţiunei $y = sp\,x$, este*

(45) $$y' = \pm(sp^2 x + cp^2 x),$$

unde se ia semnus + când arcul x este în cadranul I sau IV (în care sp x creşte cu arcul) şi semnul — când arcul x este în cadranele II sau III (în care sp x descreşte când arcul creşte).

Formula de derivare (45) este valabilă si pentru toate arcele congruente cu 2π celor indicate.

Demonstraţie. Vom considera mai multe cazuri:

1°. *Cazul* $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Dăm lui x o creştere h astfel ca $0 < x+h \leq \frac{\pi}{2}$ şi fie k creşterea corespunzătoare lui y, avem:

$$k = sp\,(x+h) - sp\,x.$$

Dezvoltând primul membru şi apoi simplificând, obţinem:

$$k = \frac{sp\,x + sp\,h - 2\,sp\,x\,sp\,h}{1-2\,sp\,x\,sp\,h} - sp\,x = \frac{sp\,h\,(1-2\,sp\,x+2\,sp^2 x)}{1-2\,sp\,x\,sp\,h}.$$

Impărțind cu h şi trecând la limită pentru $h=0$, rezultă,

$$\lim_{h=0}\frac{k}{h} = \lim_{h=0}\frac{sp\,h}{h}\cdot\frac{1-2\,sp\,x+2\,sp^2 x}{1-2\,sp\,x\,sp\,h} = 1-2\,sp\,x+2\,sp^2 x = sp^2 x + (1-sp\,x)^2,$$

fiindcă:

$$\lim_{k=0}\frac{sp\,h}{h} = 1.$$

In definitiv avem:

(46) $$y' = sp^2 x + cp^2 x.$$

2°. *Cazul* $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$. Arcul x fiind în al 2-lea cadran, arcul $\pi - x$ este în primul cadran, astfel că formula de derivare (46) ne dă:

(47) $$[sp\,(\pi-x)]'_{\pi-x} = sp^2(\pi-x) + cp^2(\pi-x).$$

Dar în virtutea relaţiilor (2), avem:

$$sp\,(\pi-x) = sp\,x, \qquad cp\,(\pi-x) = -cp\,x.$$

Derivând prima din aceste relaţii în raport cu $\pi - x = t$, găsim,

$$[sp(\pi - x)]'_{\pi - x} = (sp\, x)'_x \cdot x'_t = -(sp\, x)',$$

astfel că relaţia (47) devine:

$$(sp\, x)' = -(sp^2 x + cp^2 x).$$

3°. *Cazul,* $\pi \leqq x \leqq \frac{3\pi}{2}$. Arcul x fiind în al 3-lea cadran, arcul $\pi + x$ este în cadranul al 5-lea şi funcţiunei $sp(\pi + x)$ i se poate aplica formula de derivare (46), avem astfel:

(48) $$[sp(\pi + x)]'_{\pi + x} = sp^2(\pi + x) + cp^2(\pi + x).$$

In virtutea relaţiilor (3) însă:

$$sp(\pi + x) = -sp\, x, \qquad cp(\pi + x) = -cp\, x.$$

Derivând prima din aceste relaţii în raport cu $\pi + x = t$, obţinem:

$$[sp(\pi + x)]'_{\pi + x} = -(sp\, x)'_x \cdot x'_t = -(sp\, x)'.$$

Relaţia (48) devine astfel:

$$(sp\, x)' = -(sp^2 x + cp^2 x).$$

4°. *Cazul* $\frac{3\pi}{2} \leqq x < 2\pi$. Arcul x fiind în cadranul al 4-lea, arcul $2\pi - x$ este în primul cadran, astfel că formula de derivare (46) ne dă:

(49) $$[sp(2\pi - x)]'_{2\pi - x} = sp^2(2\pi - x) + cp^2(2\pi - x).$$

Dar avem:

$$sp(2\pi - x) = sp(-x) = -sp\, x,$$

$$cp(2\pi - x) = cp(-x) = cp\, x.$$

Derivând prima din aceste relaţii în raport cu $2\pi - x = t$, găsim:

$$[sp(2\pi - x)]'_{2\pi - x} = -(sp\, x)'_x \cdot x'_t = (sp\, x)',$$

astfel că relaţia (49) devine:

$$(sp\, x)' = sp^2 x + cp^2 x,$$

Formula de derivare (45) corespunzătoare cazului aci tratat este astfel demonstrată.

Derivata funcţiunii $y = cp\, x$.

26. *Derivata funcţiunii* $y = cp\, x$, *este*

(50) $$\boxed{y' = \mp (sp\, x)' = \mp (sp^2 x + cp^2 x)},$$

unde se ia semnul — pentru cadranele I şi II (în care $cp\, x$ *descreşte când arcul creşte) şi semnul +* *când arcul* x *este în cadranele III şi IV (în care* $cp\, x$ *creşte cu arcul.)*

Formula de derivare (50) este valabilă şi pentru toate arcele congruente cu 2π *celor indicate.*

Demonstraţie. In adevăr, derivând relaţiile (4) şi (4'), formula de derivare (50) se vede imediat că este justificată.

Derivatele funcţiunilor $Sp\, x$ şi $Cp\, x$.

27. 1°. Derivând în raport cu x expresiunile lui $Sp\, x$ din tabloul (11) pentru diferitele cadrane, găsim:

(51) $$\boxed{(Sp\, x)' = \pm \sec^2 x},$$

unae semnul + *convine când* x *este în cadranele I şi II, iar semnul — convine când* x *este in cadranele III şi IV.*

Formula (51) *este valabilă şi pentru cadranele congruente cu* 2π *celor indicate.*

2°. Derivând în raport cu x expresiunile lui $Cp\, x$ din tabloul (11) pentru diferitele cadrane, găsim:

(52) $$\boxed{(Cp\, x)' = \mp \operatorname{cosec}^2 x},$$

unde se ia semnul — când x *este în cadranele I şi IV, iar semnul +* *se ia când* x *este în cadranele II şi III.*

Formula (52) este valabilă şi pentru cadranele congruente cu 2π *celor indicate.*

STUDIUL FUNCŢIUNILOR PATRATICE.

Reprezentările lor grafice. Curba acoladă.

28. Ne propunem a studia mai de aproape *funcţiunile patratice* de care ne-am ocupat şi a construi graficele lor corespunzătoare.

Studiul funcţiunii $y = sp\, x$.

29. In baza proprietăţii de periodicitate este suficient a studia funcţiunea $y = sp\, x$ numai pentru $0 \leqq x \leqq 2\pi$.

Dar şi acest interval de variaţie se poate reduce

la acel în care $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$, în baza următoarelor două observări:

1°. Arcele $\frac{\pi}{2} - x, \frac{\pi}{2} + x$ fiind suplimentare, avem,

$$sp\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sp\left(\frac{\pi}{2} + x\right),$$

ceeace înseamnă că funcţiunea $y = sp\, x$ primeşte valori egale pentru două valori a lui x simetrice faţă de $x = \frac{\pi}{2}$.

Curba în intervalul $(0, \pi)$ are deci axa de simetrie $x = \frac{\pi}{2}$.

2°. In virtutea relaţiei,

$$y = sp\, x = -sp\,(\pi + x)$$

rezultă că valoarea lui y pentru $x = \alpha$, $(0 \leqq \alpha \leqq \pi)$, este egală şi de semn contrar cu valoarea lui y pentru $x = \pi + \alpha$. Geometric, aceasta înseamnă că pentru a avea curba reprezentativă a funcţiunii $y = sp\, x$ în intervalul $\pi \leqq x \leqq 2\pi$, trebuie a deplasa spre dreapta cu $x = \pi$ porţiunea din intervalul $(0, \pi)$ şi apoi a o inversa faţă de O x.

Vom studia deci funcţiunea $y = sp\, x$ numai pentru $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$.

30. Pentru acest caz, avem

$$y' = sp^2 x + cp^2 x,$$

$$y'' = 2\,[sp\, x\,(sp\, x)' + cp\, x\,.\,(cp\, x)'] = 2\, y'\,(sp\, x - cp\, x),$$

astfel că studiul funcţiunii $y = sp\, x$ în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ îl putem rezuma acum în următorul tablou de variaţie:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
y'	1	+	0,5	+	1
y''	−2	—	0	+	2
y	0	cr.	0,5	cr.	1

Graficul funcţiunii $y = sp\, x$.

31. Luăm sistemul de axe rectangulare $x\,O\,y$. Urmărind tabloul de variaţie şi având în vedere cele două observări importante 1° şi 2°, putem construi graficul funcţiunii $y = sp\, x$ în intervalul $(0, 2\pi)$, grafic care în virtutea periodicităţii se poate continua la dreapta şi la stânga.

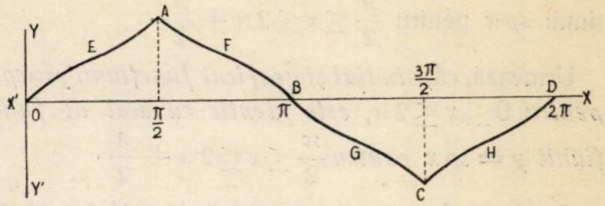


Fig. 3.

Graficul funcţiunii $y = sp\, x$, construit, (fig. 3), porneşte din O *tangent la prima bisectoare, se ridică având concavitatea către* O *y', are în* $E\left(\frac{\pi}{4}, 0{,}5\right)$ *un punct de inflexiune, coeficientul unghiular al tangentei în acest punct fiind* 0,5, *îşi întoarce mai departe concavitatea către* O *y şi ajunge în punctul* $A\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ *tangent la o dreaptă de coeficient unghiular 1.*

In baza observării 1°, *graficul se continuă cu porţiunea* A F B *simetrică faţă de dreapta* $x = \frac{\pi}{2}$.

Graficul se continuă mai departe în intervalul $(\pi, 2\pi)$ *cu porţiunea* B C D *care se obţine, în baza observării* 2°, *prin deplasarea spre dreapta a porţiunii* O A B *cu intervalul* $x = \pi$ *şi inversarea ei faţă de* O *x.*

Vom remarca că graficul construit O A B C D prezintă: 4 puncte de inflexiune, E, F, G, H; două puncte anguloase A şi C în care avem câte două tangente de coeficienţi unghiulari ± 1, ∓ 1; punctul de inflexiune artificială B, fiindcă în acest punct derivata 2-a a funcţiunii nu este zero, ea are valoarea ∓ 2.

Curba acoladă.

32. Privind graficul din (fig. 3) şi văzând asemănarea ce o au cele două porţiuni O A B şi B C D cu braţele unei acolade obicinuite, am fost îndreptăţit să numesc curba $y = sp\, x$, *„curba acoladă“.*

Studiul şi graficul funcţiunii $y = cp\, x$.

33. Având în vedere relaţiile cunoscute,

$$cp\,x = sp\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sp\left(\frac{\pi}{2} + x\right),$$

deducem că valorile lui $cp\,x$ pentru $0 \leq x \leq 2\pi$ sunt respectiv egale cu acelea corespunzătoare funcţiunii $sp\,x$ pentru $\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi + \frac{\pi}{2}$.

Urmează, că, *studiul şi graficul funcţiunii* $y = cp\,x$ *pentru* $0 \leq x \leq 2\pi$, *este identic cu acel al funcţiunii* $y = sp\,x$ *pentru* $\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi + \frac{\pi}{2}$.

Graficul funcţiunii $y = cp\,x$ *este astfel acel din (fig. 4)*, care se poate continua prin periodicitate la dreapta şi la stânga.

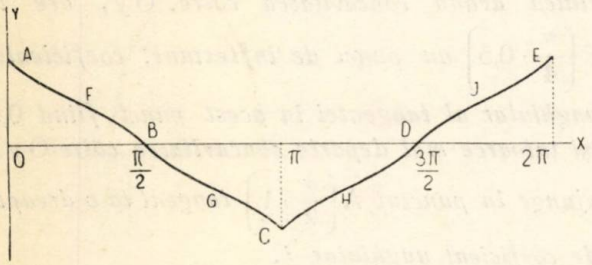


Fig. 4.

Acest grafic prezintă: punctele de inflexiune F, G, H, I; punctul angulos C în care avem două tangente de coeficienţi unghiulari ∓ 1; punctele de inflexiune artificială B şi D, derivata 2-a nefiind nulă în aceste puncte.

Studiul şi graficul funcţiunii $y = Sp\,x$.

34. Această funcţiune fiind periodică de perioadă 2π, o vom studia numai în intervalul $(0, 2\pi)$. Dar şi acest interval de variaţie se mai poate reduce în baza următoarelor două observări:

1°. Arcele $\frac{\pi}{2} - x$, $\frac{\pi}{2} + x$ fiind suplimentare, rezultă din relaţiile (2)

$$Sp\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\,Sp\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$$

Urmează că funcţiunea $Sp\,x$ primeşte valori egale şi de semne contrare pentru două valori a lui x simetrice faţă de $x = \frac{\pi}{2}$.

Dacă avem construit graficul funcţiunii $y = Sp\,x$ în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, trebuie să luăm mai departe în intervalul $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, porţiunea simetrică celei construite şi s'o inversăm faţă de $O\,x$.

2°. Cum în relaţiile (2) şi (3) găsim,

$$Sp\,(\pi - x) = -\,Sp\,x, \qquad Sp\,(\pi + x) = -\,Sp\,x,$$

rezultă:

$$Sp\,(\pi - x) = Sp\,(\pi + x).$$

Aceasta înseamnă că funcţiunea $Sp\,x$ primeşte valori egale pentru două valori a lui x simetrice faţă de $x = \pi$. Graficul funcţiunii $y = Sp\,x$ în intervalul $(0, 2\pi)$ are $x = \pi$ ca axă de simetrie.

35. Este deci suficient a face studiul funcţiunii $y = Sp\,x$ numai pentru $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Având în vedere, că în acest caz, primele două derivate ale funcţiunii $y = Sp\,x = 1 + \operatorname{tg} x$, sunt,

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad y'' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x},$$

putem rezuma discuţiunea în următorul tablou:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
y'	1	+	2	+	$+\infty$
y''	0	+	4	+	$+\infty$
y	1	cr.	2	cr.	$+\infty$

36. *Graficul.* Cu ajutorul acestui tablou şi a observărilor 1° şi 2°, graficul funcţiunii $y = Sp\,x$, raportat la un sistem de axe rectangulare $x\,O\,y$, în intervalul $(0, 2\pi)$ este acel din (fig. 5).

Acest grafic porneşte din punctul A $(0, 1)$ *tangent la o dreaptă de coeficient unghiular* 1, *se ridică având concavitatea spre* $O\,y$ *şi ajunge asimptotic la dreapta* $x = \frac{\pi}{2}$; *apoi în baza observării* 1°, *urmează ramura care vine de la* $-\infty$ *asimptotică la dreapta* $x = \frac{\pi}{2}$ *care se ridică având concavitatea spre* $O\,y'$ *şi ajunge în* B $(\pi, -1)$ *tangentă la o dreaptă de coeficient unghiular* 1.

Mai departe, în virtutea observării 2^0, *porțiunea curbei din intervalul* $(\pi, 2\pi)$ *este simetrică cu aceea din intervalul* $(0, \pi)$.

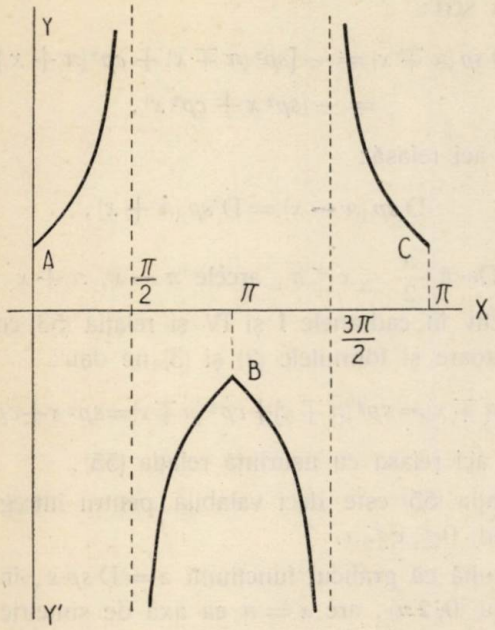


Fig. 5.

Acest grafic prezintă în B un punct angulos, în care avem două tangente de coeficient unghiular ± 1.

Graficul se poate continua prin periodicitate la dreapta și la stânga.

Studiul și graficul funcțiunii $y = Cp\,x$.

37. Având în vedere relațiile cunoscute,

$$Cp\,x = Sp\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\,Sp\left(\frac{\pi}{2} + x\right),$$

rezultă că valorile funcțiunii $y = Cp\,x$ pentru $x = \alpha$, $0 \leqq \alpha \leqq 2\pi$ sunt respectiv egale și de semne contrare cu acelea ce le primește funcțiunea $Sp\,x$ pentru $x = \alpha + \frac{\pi}{2}$.

Urmează că graficul funcțiunii $y = Cp\,x$ în intervalul $0 \leqq x \leqq 2\pi$, se obține inversând față de $O\,x$ graficul funcțiunii $Sp\,x$ din intervalul $\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi + \frac{\pi}{2}$, așa cum se vede în fig. 6).

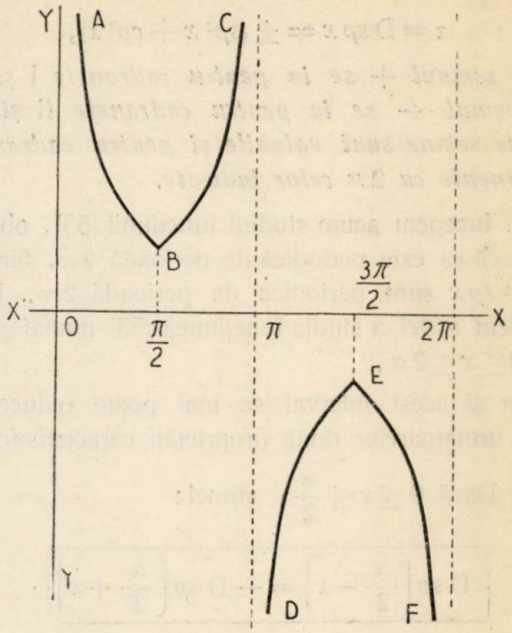


Fig. 6.

Acest grafic este format din ramurile A B C *și* D E F *asimptotice respectiv dreptelor* $x = 0$, $x = \pi$ *și* $x = \pi$, $x = 2\pi$.

Punctele $B\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ și $E\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$ sunt puncte anguloase ale curbei, având în aceste puncte câte două tangente de coeficienți unghiulari respectiv ∓ 1, ± 1.

Graficul se poate prelungi spre dreapta și stânga prin periodicitate.

O NOUĂ FUNCȚIUNE: $z = D\,sp\,x$.

Studiul și graficul ei.

38. *Derivata funcțiunii* $y = sp\,x$, *constitue o nouă funcțiune remarcabilă, pe care am notat'o cu*

$$z = D\,sp\,x,$$

folosind notația lui Cauchy și care se citește: derivata sinusului patratic de x.

Această nouă funcțiune, ne oferă un exemplu

simplu şi *natural* de funcţiune cu discontinuităţi finite şi are un grafic ce interesează.

In virtutea relaţiei (45) *putem scri încă*

$$(53) \qquad z = \mathrm{D}\,sp\,x = \pm\,(sp^2 x + cp^2 x),$$

unde semnul + *se ia pentru cadranele* I *şi* IV *şi semnul* — *se ia pentru cadranele* II *şi* III. *Aceste semne sunt valabile şi pentru cadranele congruente cu* 2π *celor indicate.*

39. Incepem acum studiul funcţiunii (53), observând că ea este periodică de perioadă 2π, fiindcă $sp\,x$, $cp\,x$ sunt periodice de perioadă 2π. Este suficient astfel a studia funcţiunea (53) numai pentru $0 \leq x \leq 2\pi$.

Dar şi acest interval se mai poate reduce în baza următoarelor două proprietăţi caracteristice.

1°. Dacă $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, atunci:

$$(54) \qquad \boxed{\mathrm{D}\,sp\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\,\mathrm{D}\,sp\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}.$$

Demonstraţie. Arcele $\frac{\pi}{2} - x$, $\frac{\pi}{2} + x$, în acest caz, sunt respectiv în cadranele I şi II şi conform relaţiei (53) şi a unor proprietăţi cunoscute, avem:

$$\mathrm{D}\,sp\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sp^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + cp^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$= cp^2 x + sp^2 x,$$

$$\mathrm{D}\,sp\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\left[sp^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + cp^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right]$$

$$= -\left[cp^2(-x) + sp^2(-x)\right] = -(cp^2 x + sp^2 x).$$

Rezultă de aci cu uşurinţă relaţia (54).

Funcţiunea $z = \mathrm{D}\,sp\,x$ primeşte astfel valori egale şi de semne contrare pentru două valori ale lui x simetrice faţă de $x = \frac{\pi}{2}$, (în intervalul $0, \pi$).

2°. *Pentru* $0 \leq x \leq \pi$, *avem:*

$$(55) \qquad \boxed{\mathrm{D}\,sp\,(\pi - x) = \mathrm{D}\,sp\,(\pi + x)}.$$

Demonstraţie. Considerăm următoarele două cazuri.

a. Dacă $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, arcele $\pi - x$, $\pi + x$ sunt respectiv în cadranele II şi III şi conform relaţiei (53) corespunzătoare şi a formulelor (2) şi (3), putem scri:

$$\mathrm{D}\,sp\,(\pi \mp x) = -\,[sp^2(\pi \mp x) + cp^2(\pi + x)]$$

$$= -\,(sp^2 x + cp^2 x).$$

De aci reiasă:

$$\mathrm{D}\,sp\,(\pi - x) = \mathrm{D}\,sp\,(\pi + x).$$

b Dacă $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$, arcele $\pi - x$, $\pi + x$ sunt respectiv în cadranele I şi IV şi relaţia (53) corespunzătoare şi formulele (2) şi (3) ne dau:

$$\mathrm{D}\,sp\,(\pi \mp x) = sp^2(\pi \mp x) + cp^2(\pi \mp x) = sp^2 x + cp^2 x.$$

De aci reiasă cu uşurinţă relaţia (55).

Relaţia (55) este deci valabilă pentru întreg intervalul, $0 \leq x \leq \pi$.

Rezultă că graficul funcţiunii $z = \mathrm{D}\,sp\,x$, în intervalul $(0, 2\pi)$, are $x = \pi$ ca axă de simetrie.

40. Vom studia astfel funcţiunea $z = \mathrm{D}\,sp\,x$ numai pentru $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Funcţiunea şi primele sale două derivate, în acest caz, sunt:

$$z = \mathrm{D}\,sp\,x = sp^2 x + cp^2 x,$$

$$z' = 2\,[sp\,x\,.\,(sp\,x)' + cp\,x\,.\,(cp\,x)'] = 2\,z\,(sp\,x - cp\,x)$$

$$z'' = 2\,z'\,(sp\,x - cp\,x) + 2\,z\,[(sp\,x)' - (cp\,x)'] =$$

$$4\,z^2 + 2\,z'\,(sp\,x - cp\,x).$$

Acum putem rezuma discuţia în următorul tablou de variaţie:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
z'	-2	—	0	+	2
z''	8		1		8
z	1	descr.	0,5	cr.	1

41. *Graficul.* Cu ajutorul acestui tablou şi a proprietăţilor 1° şi 2°, putem construi cu uşurinţă

graficul funcțiunii $z = \mathrm{D}\, sp\, x$, în intervalul $(0, 2\pi)$, (fig. 7).

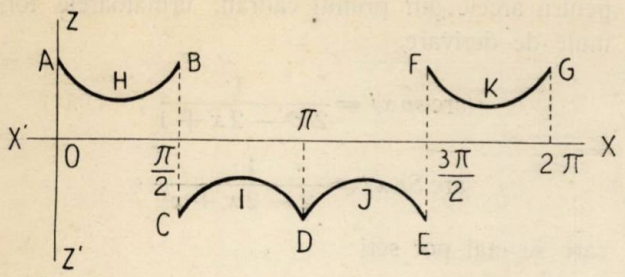


Fig. 7.

Acest grafic pornește din punctul $\mathrm{A}(0, 1)$ *tangent la o dreaptă de coeficient unghiular* -2, *coboară având concavitatea către* Oz *până în punctul* $\mathrm{H}\left(\frac{\pi}{4}, 0, 5\right)$, *se ridică apoi și ajunge în* B *tangent la o dreaptă de coeficient unghiular* 2. *Mai departe în baza proprietății* 1°. *graficul se continuă cu arcul* CID *simetric față de dreapta* $x = \frac{\pi}{2}$, *dar inversat față de* Ox.

Graficul se continuă încă în intervalul $(\pi, 2\pi)$, *în baza proprietății* 2°, *cu porțiunile* DE *și* FG *simetrice respectiv cu* DC *și* BA *față de dreapta* $x = \pi$.

Acest grafic se poate continua prin periodicitate la dreapta și la stânga. Caracteristic la acest grafic este punctul angulos D unde avem două tangente de coeficienți unghiulari ∓ 2 și mai ales *discontinuitățile finite* în punctele de absciză $x = \frac{\pi}{2}$ și $x = \frac{3\pi}{2}$.

FUNCȚIUNILE PATRATICE INVERSE.

Derivatele și graficele lor.

42. Arcele care corespund unor *funcțiuni patratice* date, se numesc *funcțiuni patratice inverse.*

Ele se exprimă prin notațiile:

$$y = \operatorname{arc} sp\, x; \qquad z = \operatorname{arc} cp\, x; \qquad u = \operatorname{arc} Sp\, x;$$
$$v = \operatorname{arc} Cp\, x,$$

care se citesc: *y este arcul al cărui sinus patratic este x; etc.*

Derivatele funcțiunilor $y = \operatorname{arc} sp\, x$, $z = \operatorname{arc} cp\, x$.

43. Inversând aceste funcțiuni deducem:

$$x = sp\, y, \qquad x = cp\, z. \tag{56}$$

Derivând în raport cu x avem respectiv:

$$1 = \pm (sp^2 y + cp^2 y) \cdot y', \quad 1 = \mp (sp^2 z + cp^2 z) \cdot z'.$$

De aci deducem:

$$y' = \frac{\pm 1}{sp^2 y + cp^2 y}, \qquad z' = \frac{\mp 1}{sp^2 z + cp^2 z},$$

Având în vedere relația (4″) și relațiile (56), mai putem scri:

$$y' = \frac{\pm 1}{sp^2 y + (1 \mp sp\, y)^2} = \frac{\pm 1}{2x^2 \mp 2x + 1}$$
$$z' = \frac{\mp 1}{sp^2 z + (1 \mp sp\, z)^2} = \frac{\mp 1}{2x^2 \mp 2x + 1}. \tag{57}$$

Specificând semnele și cadranele ce corespund arcelor y și z, avem următorul tablou:

(58)

Derivatele lui $y = \operatorname{arc} sp\, x$.	Derivatele lui $z = \operatorname{arc} cp\, x$.	Cadranele
$\frac{1}{2x^2 - 2x + 1}$	$\frac{-1}{2x^2 - 2x + 1}$	I
$\frac{-1}{2x^2 - 2x + 1}$	$\frac{1}{2x^2 - 2x + 1}$	II
$\frac{-1}{2x^2 + 2x + 1}$	$\frac{1}{2x^2 + 2x + 1}$	III
$\frac{1}{2x^2 + 2x + 1}$	$\frac{-1}{2x^2 + 2x + 1}$	IV

Aceste formule de derivare sunt valabile și pentru cadranele congruente cu 2π celor indicate.

Derivatele funcțiunilor $u = arc\, Sp\, x$, $v = \operatorname{arc} Cp\, x$.

44. Inversând aceste funcțiuni și ținând seamă de relațiile (5) și (6', avem:

$$x = Sp\, u = \frac{1}{cp\, u}, \qquad x = Cp\, v = \frac{1}{sp\, v}.$$

De aci deducem:

$$cp\,u = \frac{1}{x}, \qquad sp\,v = \frac{1}{x}$$

şi prin urmare:

$$u = \text{arc}\,cp\,\frac{1}{x}, \qquad v = \text{arc}\,sp\,\frac{1}{x}.$$

Derivând aceste relaţii conform formulelor de derivare (57), obţinem respectiv:

$$u' = \frac{\mp 1}{\frac{2}{x^2} \mp \frac{2}{x} + 1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\pm 1}{2 \mp 2x + x^2},$$

$$v' = \frac{\pm 1}{\frac{2}{x^2} \mp \frac{2}{x} + 1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\mp 1}{2 \mp 2x + x^2}.$$

Specificând semnele şi cadranele ce trebuie să alegem pentru arcele u şi v, obţinem următorul tablou:

(59)

Derivatele lui $u = \text{arc}\,Sp\,x$	Derivatele lui $v = \text{arc}\,Cp\,x$	Cadranele
$\frac{1}{2 - 2x + x^2}$	$\frac{-1}{2 - 2x + x^2}$	I
$\frac{-1}{2 - 2x + x^2}$	$\frac{1}{2 - 2x + x^2}$	II
$\frac{-1}{2 + 2x + x^2}$	$\frac{1}{2 + 2x + x^2}$	III
$\frac{1}{2 + 2x + x^2}$	$\frac{-1}{2 + 2x + x^2}$	IV

Aceste formule de derivare sunt valabile şi pentru cadranele congruente cu 2π celor indicate.

45. *Graficele funcţiunilor patratice inverse* sunt uşor de construit, întru cât am văzut cum se obţin graficile *functiunilor patratice directe.*

RELAŢIUNI INTRE FUNCŢIUNILE PATRATICE INVERSE ŞI FUNCŢIUNILE CIRCULARE INVERSE.

46. *Pentru arcele din primul cadran, sau acelea congruente lor cu 2π, vom stabili următoarele relaţii interesante:*

(60) $$\boxed{\text{arc}\,sp\,x = \text{arc tg}\,(2x - 1) + \frac{\pi}{4}},$$

(61) $$\boxed{\text{arc}\,Sp\,x = \text{arc tg}\,(x - 1)},$$

Demonstratie. In tablourile (58) şi (59) găsim pentru arcele din primul cadran, următoarele formule de derivare,

$$(\text{arc}\,sp\,x)' = \frac{1}{2x^2 - 2x + 1};$$

$$(\text{arc}\,Sp\,x)' = \frac{1}{2 - 2x + x^2},$$

care se mai pot scri:

(62)
$$(\text{arc}\,sp\,x)' = \frac{2}{1 + (2x - 1)^2};$$

$$(\text{arc}\,Sp\,x)' = \frac{1}{1 + (x - 1)^2}.$$

Natural, în prima din aceste relaţii avem $0 \leq x \leq 1$ şi în a 2-a, $1 \leq x \leq \infty$.

Multiplicând cu dx relaţiile (62), (63) şi integrând prima de la 0 la x $(0 \leq x \leq 1)$ şi a 2-a de la 1 la x, $(1 \leq x \leq \infty)$, obţinem respectiv:

$$\text{arc}\,sp\,x = \text{arc tg}\,(2x - 1) + \frac{\pi}{4};$$

$$\text{arc}\,Sp\,x = \text{arc tg}\,(x - 1).$$

Avem tocmai relaţiile (60) şi (61) din enunţ.

Relaţia (61) se poate justifica de altfel direct şi pe figură.

Altă demonstraţie. Dacă u şi v sunt arce în primul cadran, putem scri evident:

$$\text{tg}\left(u - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\text{tg}\,u - 1}{1 + \text{tg}\,u} = \frac{2\,\text{tg}\,u}{1 + \text{tg}\,u} - 1 = 2\,sp\,u - 1;$$

$$Sp\,v = 1 + \text{tg}\,v.$$

Prin inversare obţinem:

$$u - \frac{\pi}{4} = \text{arc tg}\,(2\,sp\,u - 1); \qquad v = \text{arc tg}\,(Sp\,v - 1).$$

Dacă notăm pentru una şi alta din aceste relaţii

$$sp\,u = x; \qquad Sp\,v = x,$$

ele devin respectiv,

$$\text{arc}\,sp\,x = \text{arc tg}\,(2x - 1) + \frac{\pi}{4};$$

$$\text{arc}\,Sp\,x = \text{arc tg}\,(x - 1),$$

care sunt tocmai relaţiile (60) şi (61).

47. *Pentru arcele din primul cadran şi acelea*

congruente lor cu 2π, vom stabili încă următoarele relații:

(64) $$\boxed{\text{arc } sp\, x = \text{arc tg}\frac{x}{1-x}};$$

(65) $$\boxed{\text{arc } Sp\, x = \text{arc tg}\frac{x-2}{x} + \frac{\pi}{4}}.$$

Demonstrație. Dacă u și v sunt arce în primul cadran, avem:

$$\text{tg}\, u = \frac{sp\, u}{1 - sp\, u};$$

$$\text{tg}\left(v - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\text{tg}\, v - 1}{1 + \text{tg}\, v} = \frac{(\text{tg}\, v + 1) - 2}{1 + \text{tg}\, v} = \frac{Sp\, v - 2}{Sp\, v}.$$

Inversând aceste relații, obținem:

$$u = \text{arc tg}\frac{sp\, u}{1 - sp\, u}; \qquad v - \frac{\pi}{4} = \text{arc tg}\frac{Sp\, v - 2}{Sp\, v}.$$

Dacă notăm pentru una și alta din aceste relații

$$sp\, u = x; \qquad Sp\, v = x,$$

ele devin respectiv:

$$\text{arc } sp\, x = \text{arc tg}\frac{x}{1-x}; \quad \text{arc } Sp\, x = \text{arc tg}\frac{x-2}{x} + \frac{\pi}{4},$$

tocmai relațiile (64) și (65).

Relații analoage se pot stabili pentru arcele din alte cadrane.

(Va urma: PARTEA II-a)

NOTE MATEMATICE

21. — *Trouver une solution à deux paramètres de l'équation* $x_1^4 + 2x_2^4 + 3x_3^4 = y_1^4 + 2y_2^4 + 3y_3^4$.

Considérons l'équation $x_1^4 + 2x_2^4 = 3y_1^4 + 2y_2^4$.

Solution initiale: $6^4 + 2 \cdot 1^4 = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 5^4$.

Posons dans l'équation à résoudre:

$$\begin{cases} x_1 = 6 + \alpha_1 t, & x_2 = 1 + \alpha_2 t, & x_3 = \alpha_3 t, \\ y_1 = \alpha_1 t, & y_2 = 5 + \alpha_2 t, & y_3 = 2 + \alpha_3 t. \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation, et en annulant le coefficient de t^3, on trouve entre les α_i la relation

$$27\alpha_1 - 31\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0, \quad \text{ou} \quad \alpha_3 = \frac{27\alpha_1 - 31\alpha_2}{3}.$$

On aura, pour déterminer t, l'équation

$$3[1 \cdot 36 \cdot \alpha_1^2 + 2 \cdot (-24)\alpha_2^2 + 3(-4)\alpha_3^2] =$$
$$2[1 \cdot (-6)\alpha_1^3 + 2 \cdot 4\alpha_2^3 + 3 \cdot 2\alpha_3^3]t,$$

donc

$$t = 3\frac{(9\alpha_1^2 - 12\alpha_2^2 - 3\alpha_3^2)}{-3\alpha_1^3 + 4\alpha_2^3 + 3\alpha_3^3} = \frac{-9(3\alpha_1^2 - 4\alpha_2^2 - \alpha_3^2)}{3\alpha_1^3 - 4\alpha_2^3 - 3\alpha_3^3}.$$

On aura finalement une solution à deux paramètres indépendants α_1 et α_2.

Exemples numériques.

1°. $\alpha_1 = 3, \ \alpha_2 = 3, \ t = \frac{15}{11}$.

On trouve l'identité:

$$111^4 + 2.56^4 + 3.60^4 = 45^4 + 2.100^4 + 3.38^4$$
$$(= 210 \cdot 356 \cdot 033).$$

2°. $\alpha_1 = 15, \ \alpha_2 = 12, \ t = -\frac{33}{130}$.

$$285^4 + 2 \cdot 266^4 + 3 \cdot 363^4 = 495^4 + 2.254^4 + 3.103^4$$
$$(= 68 \cdot 699 \cdot 531 \cdot 780.$$

3°. $\alpha_1 = 1, \ \alpha_2 = 0, \ \alpha_3 = 9, \ t = -\frac{9}{28}$.

$$159^4 + 2 \cdot 28^4 + 3 \cdot 81^4 = 9^4 + 2 \cdot 140^4 + 3 \cdot 25^4$$
$$(= 769 \cdot 498 \cdot 436).$$

Remarquons qu'on peut écrire cette identité sous la forme

$$159^4 + 2.28^4 + 3^{17} = 3^8 + 2 \cdot 140^4 + 3 \cdot 5^8 \text{ etc.}$$

A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică,* anul XLIV, No. 4, Decemvrie 1938. Sărbătorirea D-lui Profesor *Ion Ionescu* de către corpul profesoral al Școalei Politechnice din *București,* de Cpt. Comandor *I. Linteș.* O problemă de construcție, de. *O. N. Țino.* Note matematice, probleme rezolvate și propuse.

2. *Revista de Ciencias,* anul XL, Iunie 1938. Inaugurarea galeriei D-lor Decani care au condus facultatea de științe biologice, fizice și matematice. Asupra funcțiunilor olomorfe și univalente în cercul unitar, de *Alfred Rosenblatt.* Asupra coeficienților seriilor univalente în cercul unitar, de *Alfred Rosenblatt.* Observare asupra notei precedente, de *A. Rosenblatt.* Asupra iterației substituțiilor algebrice liniare cu o infinitate de variabile și aplicații la teoria probabilităților cu lanț, de *Robert Fortet.* Alte articole.

3. *Boletin Matematico,* anul XI, No. 19, Decemvrie 1938, *Buenos-Aires.* O rezolvare parametrică a ecuației pitagorice, $x^3 + y^3 = z^3$ și aplicații la soluții întregi, de *B. I. Baidaff* și *A. Heurtley de la Riestra.* O proprietate a curbelor închise *Jordan* fără punct multiplu, de *I. Valera Gil.* Schema geometriei coeuclidiane plane, de *L. Gutiérrez Novoa.* Primul deceniu, de *B. I. Baidaff.*

4. *Știință și Progres, Revista științifică a liceelor militare,* anul V, N-rile 4—5, Decemvrie și Ianuarie 1939. Noțiuni sumare de Evoluția geologică a Pământului Românesc, de Prof. Dr. *I. P. Voiteşti.* Fundul Mărilor, de Dr. *Eugen A. Pora.* Mișcarea browniană și numărul lui *Avogadro,* de Prof. *Ion Lungu.* Undele cosmice și viața, de Elev *Grigore Pintilie.* Publicații noui Probleme rezolvate și propuse.

5. *Pitagora,* anul IV, No. 3. O generalizare a teoremei lui *Aubert,* de *C. Cosniță.* Notă de geometrie analitică, de *Gh. Gh. Constantinescu.*

6. *Ing. Ion Cristescu.* Memoriu de lucrări publicate.

7. *Ing. Victor Blăsian.* Terminologia tehnică românească privitoare la construcțiile miniere.

8. *Ing. C. I. Câlniceanu.* Contribuțiuni la normalizarea Industriei Românești.

9. *Dr. Crist. Predescu.* Zece ani de funcționare a observatorului Meteorologic din *Cluj.*

10. *Dr. Crist. Predescu.* Studiul averselor la *Cluj.*

11. *Dr. Crist. Predescu.* Insolation et nébulosité à *Cluj.*

12. *Dr. Crist. Predescu.* Determinări comparative de temperatură între noua și vechea stațiune meteorologică din *Cluj.*

13. *Dr. Crist. Predescu.* Girueta electrică numai cu doi conductori.

PROBLEME REZOLVATE

91. — *Se dă triunghiul* A B C *și* A A_1 *înălțimea. Să se găsească pe latura* B C *un punct* P, *prin care să se ducă o secantă, care să taie laturile* A B *și* A C *respectiv în punctele* N *și* M *așa ca paralelele duse prin aceste puncte la laturile* A C *și* A B *să treacă prin* A_1. *Dacă numai* A A_1 *variază,* P *rămâne fix. Există printre triunghiurile* A B C *unul pentru care secanta cerută este perpendiculară pe latura* A B *a triunghiului. Să se demonstreze că în cazul acesta cercurile* B N A_1, A P N *sunt ortogonale.*

A. Coman

1°. Construcția punctului P rezultă imediat ducând paralelele A_1 N, A_1 M la A C, A B și luând intersecția lui N M cu B C.

2°. Presupun că B, A_1, C rămân fixe și A se mișcă pe înălțimea A A_1. Fie N_1, M_1 proecțiile lui N și M pe B C. Pe figură se vede că

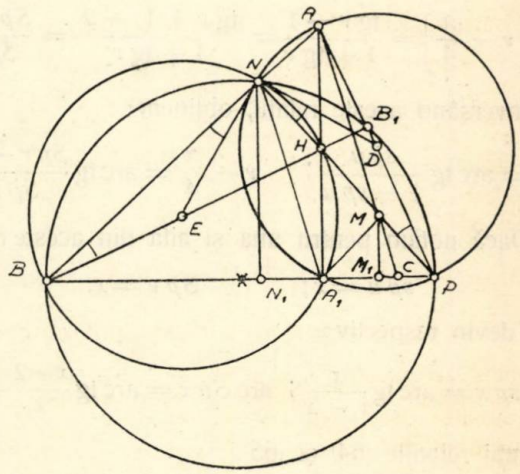
$$(1) \qquad \frac{NA}{NB} = \frac{N_1A_1}{N_1B} = \frac{A_1C}{A_1B} = C',$$

deci N_1 este fix. La fel, din

$$(2) \qquad \frac{MA}{MC} = \frac{M_1A_1}{M_1C} = \frac{BA_1}{A_1C} = C'.$$

rezultă că M_1 este fix și deci punctele N și M descriu dreptele N N_1, M M_1 perpendiculare pe B C. Apoi avem

$$(3) \qquad \frac{PM_1}{PN_1} = \frac{MM_1}{NN_1} = \frac{M_1A_1}{N_1B} = C',$$



căci triunghiurile A_1M_1M, BN_1N sunt asemeni. Din (3) se vede că P este fix.

3°. Cercul descris pe B P ca diametru întâlnește în N perpendiculara din N_1 pe B C. Triunghiul B N P este evident dreptunghic în N. Se duce B N care taie în A pe A_1 A și N P care taie în M pe N P și în H pe A A_1.

Din definițiile (1), (2), (3) ale punctelor N_1, M_1, P se scoate

$$\frac{N_1A_1}{N_1B} = \frac{NA}{NB} = \frac{A_1C}{A_1B} = \frac{M_1C}{M_1A_1} = \frac{MC}{MA},$$

sau apropiind rapoartele

$$\frac{A_1C}{A_1B} = \frac{MC}{MA}$$

se vede că A_1 M este paralelă cu A B. La fel se arată că A_1 N este paralelă cu A C.

Concluzia este că atunci când punctele N_1, M_1, P sunt definite de (1), (2) și (3) triunghiul A B C

construit ca la punctul 3° se bucură de proprietatea că secanta P M N este perpendiculară pe A B.

In acest caz particular punctul H fiind intersecția înălțimelor AA_1, P N este ortocentru în triunghiul P A B.

Centrul cercului BNA_1 este mijlocul E al lui B H, iar centrul cercului A P N este mijlocul D al lui A P. Se vede pe figură că

$$\sphericalangle ENB = \sphericalangle EBN = \sphericalangle B_1BN$$

și

$$\sphericalangle DNP = \sphericalangle NPD = \sphericalangle NPB,$$

dar patrulaterul BNB_1P fiind inscriptibil, avem

$$\sphericalangle B_1BN = \sphericalangle NPB,$$

de unde

$$\sphericalangle BNE = \sphericalangle DNP$$

și deci

$$\sphericalangle DNE = \frac{\pi}{2},$$

ceia ce arată că cele două cercuri sunt ortogonale.

Soluția aceasta este redijată după soluția trimisă la 20 Aprilie 1922 de d-l *Tib. Popoviciu,* când era elev în clasa VI a liceului „Moise Nicoară" din Arad.

S-au primit foarte bune soluțiuni încă de la d-nii: *Crăinicescu Gh.* (când era elev cl. VIII lic. Diaconovici Loga, Timișoara); *Căp. Focșeneanu I. M.* (când era elev în cl. VI-a lic. Mânăștirea Dealului); *Popovici Th. I.*; *Silion Gh. I.* (când era elev cl. VIII lic. real Brașov); *Stoenescu I. Alex.* (când era în cl. VIII București); *Vasilui C. I.* (când era elev lic. Militar Mânăstirea Dealului).

G-l. Gh. B.

1372. — *Un unghiu drept se rotește în jurul vârfului său fix. Laturile lui întâlnesc două drepte paralele* Δ, Δ′ *respectiv în* B, C *și* B′, C′. *Se cere locul geometric al intersecției dreptelor* B C′, B′ C *și al centrului de greutate al patrulaterului* B C C′ B′.

G-L Gh Buicliu

Consider, mai general, un unghiu oarecare cu vârful în 0 și fie:

h, H proecțiile lui 0 pe Δ și Δ′.

M, M′ mijloacele segmentelor B′ C′, B C.

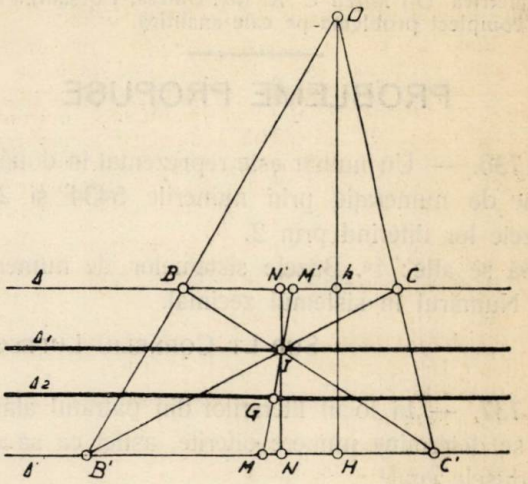
I intersecția lui B C′ cu C B′.

N, N′ proecțiile lui I pe Δ′ și Δ.

G centrul de greutate al patrulaterului B C C′ B′.

Triunghiurile O B C, O B′ C′ dau

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{hO}{OH} = \text{Const.} \tag{1}$$



Triunghiurile asemeni I N′ B și I N C′ dau

$$\frac{IN'}{IN} = \frac{IB}{IC'}, \tag{2}$$

iar din triunghiurile asemeni I B C, I B′ C′ se scoate

$$\frac{IB}{IC'} = \frac{BC}{B'C'}. \tag{3}$$

Comparând (3) cu (2) și cu (1) se găsește

$$\frac{IN'}{IN} = \frac{Oh}{OH} = \text{Const.}$$

Deci I descrie o dreaptă Δ_1 paralelă cu Δ și Δ′.

Figura B C C′ B′ este un trapez. Dacă $b < b'$ sunt bazele lui, se știe că G se află pe M M′ așa în cât

$$\frac{GM}{GM'} = \frac{2b' + b}{2b + b'},$$

care se mai poate scrie

$$\frac{GM}{GM'} = \frac{2 + \dfrac{B'C'}{BC}}{2\dfrac{B'C'}{BC} + 1}$$

și ținând seamă de (1)

$$\frac{GM}{GM'} = \text{Const.},$$

care arată că G descrie de asemeni o paralelă Δ_2 la Δ, Δ′.

Se vede din demonstrație că unghiul O nici nu

trebuie să fie constant. Demonstrația este aceiași dacă O este între Δ și Δ'.

D-l *Herman A. V.* (student, Cluj) a dat o bună soluție geometrică. D-l *Mișca C. K.* (lic. Unirea, Focșani) a rezolvat complect problema pe cale analitică.

PROBLEME PROPUSE

1736. — Un număr este reprezentat în două sisteme de numerație prin numerile 5434 și 2581, bazele lor diferind prin 2.

Să se afle: 1°. Bazele sistemelor de numerație. 2°. Numărul în sistemul zecimal.

SUB-LT CORNELIU LUPESCU

1737. — In locul literelor din patratul alăturat să se determine numere diferite, astfel ca să avem produsele egale

A	B	C
D	E	F
G	H	I

$$A.B.C = D.E.F = G.H.I = A.D.G = B.E.H = C.F.I = 1939.$$

A MOESSNER

1738. — Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt[4]{5x+1} - \sqrt{5x^2-9x-2} + 2\sqrt[4]{x-2} = 0.$$

AUGUSTIN I MATEI

1739. — Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se construesc în afară patratele AB B′ B″ și AC C′ C″. Fie D punctul unde simediana care pleacă din vârful A taie cercul circumscris triunghiului ABC. Să se arate că cercurile AB′ D și AC′ D sunt ortogonale.

VASILE VASU

1740. — Fie O și O_9 centrul cercului circumscris și al cercului celor 9 puncte a triunghiului ABC. Un diametru D al cercului O întâlnește laturile BC, CA, AB în A_1, B_1, C_1. Un diametru D′ a lui O_9, paralel cu D întâlnește laturile triunghiului complimentar al lui ABC în A_1', B_1', C_1'. Să se demonstreze că dreptele $A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1'$ trec prin centrul de greutate al triunghiului ABC.

Transversala reciprocă a lui D taie laturile triunghiului ABC în A_2, B_2, C_2, iar transversala reciprocă a lui D′ față de triunghiul complimentar, taie laturile acestui triunghiu în A_2', B_2', C_2'. Să se demonstreze că AA_1', BB_1', CC_1' trec respectiv prin A_2, B_2, C_2, iar AA_1, BB_1, CC_1 trec respectiv prin A_2', B_2', C_2'.

Dacă α, β, γ sunt punctele euleriene de pe înălțimele triunghiului ABC, atunci $\alpha A_1, \beta B_1, \gamma C_1$ se întâlnesc într'un punct pe cercul O_9.

G-L GH. BUICLIU

1741. — Pe laturile unui triunghiu ABC, considerate ca diametre se construesc trei cercuri. Să se arate că între lungimele tangentelor comune, considerate între punctele de contact ale tangentelor comune, ale acestor cercuri, există relațiunile:

1°. $$T_a^2 + T_b^2 + T_c^2 = r(4R + r) = rp\sum \operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

2°. $$T_a . T_b . T_c = Sr = \frac{1}{2} rbc \sin A = \frac{1}{2} rca \sin B = \frac{1}{2} rab \sin C.$$

IONEL I. STAMATE

1742. — Intr'un triunghiu ascuțitunghiu avem:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{A}{10}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{B}{10}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{C}{10}\right) \geqq \sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{7A}{10}\right)\sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{7B}{10}\right)\sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{7C}{10}\right).$$

L-T. C. IONESCU-ȚIU

1743. — Numerile $a_0, a_1, \ldots, a_n$ fiind cunoscute, să se determine numerile $A_0, A_1, \ldots, A_n$ astfel ca să avem identitatea:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cos^{2k}\alpha = \sum_{k=0}^{n} A_k \sin^{2k}\alpha,$$

oricare ar fi arcul α.

V. ALACI

Manuscrise primite de la corespondenții noștrii până la 10 a lunei curente și anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) și probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Bakony C. (1690, 1692, 1696, 1697, 1698, 1700, 1703, 1704, 1729, 1735); *Bârlea V. Suhățeanu* (1674, 1692, 1696, 1698, 1704); *Boeru C. Alexandru* (1697, 1698); *Borneas Marius* (1716); *Cetățeanu Stelian* (1658, 1720, 1729, 1730, 1733, 1734, 1835); *Checian N. Ana* (1681, 1683, 1704, 1729); *Chintescu M. Matei* (1690, 1691, 1696, 1698); *Constantinescu N. Virgil* (1674, 1699); *Cristea I. Constantin,* (1699); *Cristea I. Nicolae* (P., 1592, 1603, 1647, 1699 1729); *Diaconescu D. Ion* (P., 1673, 1682, 1707, 1710, 1713, 1719, 1729); *Dragomir Adrian* (1696, 1704, 1707, 1727); *Dragon I. Gheorghe* (1485, 1668, 1669, 1678, 1679, 1683, 1687, 1688); *Gligor N. Ioan* (P, 1692, 1707, 1729); *Marcovici Avram* (1683, 1684); *Modâlcă S. Emil* (1688, 1702, 1707, 1717, 1727, 1729, 1734); *Mureșan I. Octavian* (1674, 1683, 1688, 1704); *Papadopol D. Elena* (1657, 1729); *Radu G. Ionel* (1690, 1728, 1729, 1730); *Segal Zigu* (1719, 1729, 1730, 1733, 1734); *Șelmereanu L. Horia* (1659, 1681, 1683, 1684, 1689, 1704, 1707, 1729); *Șerban I. C-tin* (1660, 1661, 1683, 1690); *Slavov Iacob* (P., 1720, 1729); *Soceanu Eugen* (1664, 1684, 1726); *Stamate I. Ionel* (P., 1485, 1659, 1666); *Venter D-tru* (1664, 1665, 1668, 1673, 1683, 1688, 1690, 1696, 1699, 1702, 1704, 1726); *Vijelie Gh. Eugen* (1697, 1698, 1702, 1803, 1704).

INFORMAȚIUNI

La Redacțiunea „Revistei Matematice din Timișoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL XI-LEA

care a început în Martie 1938.

Costul *special* a unui abonament este de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Pentru anul al XI, care a început în Martie 1938, s'a primit până acum la Redacția „R. M. T." următorul abonament:

1. *Prof. Sergescu P.,* Universitatea, Cluj.
2. *Eugen Grabovschi,* Orhei - Basarabia, Strada I. C. Brătianu 14.
3. *Ștefan Musta,* profesor, Beiuș - Bihor Str. Pavel 4.

A APĂRUT IN BIBLIOTECA GAZETEI MATEMATICE:

CULEGERE DE PROBLEME DE TRIGONOMETRIE

Partea II,

Prețul 125 Lei — TRIGONOMETRIA PLANĂ

Acei care se interesează de identitățile în numere întregi de diferite grade, în special cu problemele *Tarry,* sunt rugați a intra în corespondență cu mine, *Alfred Moessner* Nürnberg (Germania), Grolandstrasse 79.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte și să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS:
1 an: Belgique, **30 fr.** France, **25** fr.
Etranger, 7 **belgas**

Administration:
SPHINX, Bruxelles 173, Avenue Longchamp

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenții, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

ANUL XVIII. 15 FEBRUARIE 1939 No. 12.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. † GHEORGHE ȚIȚEICA.
2. V. ALACI: TRIGONOMETRIA PATRATICA.
3. NOTE MATEMATICE: 22.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 1334, 1459, 1515.
6. PROBLEME PROPUSE: 1744–1751.
7. INFORMATIUNI.
8. TABLA DE MATERII.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVIII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVIII inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XVIII — No. 12 TIMISOARA, 15 FEBRUARIE 1939

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

† GHEORGHE ȚIȚEICA

INTRISTATĂ AZISTENȚĂ[1]

In numele *Școalei Politechnice din Timișoara,* profesori și studenți; în numele *Buletinului Științific* și a *Revistei Matematice din Timișoara,* aducem un pios omagiu și ne închinăm în fața acelui ce a fost profund cercetător în știință, a acelui ce a fost marele profesor, *Gheorghe Țițeica.*

Inzestrat cu o vie inteligență, cu o mare putere de muncă, cu o nesfârșită dragoste de Știință și de Țară, profesorul *Țițeica* a activat simultan pe trei planuri diferite:

A fost un cercetător neîntrecut în domeniul specialității sale, Geometria Superioară, Geometria Analitică și Geometria Diferențială, publicând numeroase lucrări, care l-au făcut cunoscut încă de timpuriu în străinătate, ridicând astfel prestigiul științii românești.

Lucrările sale au interesat în mod deosebit mai ales pe cercetătorii francezi și italieni de cea mai fină calitate. Astfel lucrarea sa de o mare profunzime *„Géométrie différentielle projective des Réseaux"* a devenit clasică, iar anumite suprafețe studiate încă din tinerețe, au fost numite de profesorii francezi *„Suprafețele Țițeica".*

Ca un corolar a acestei fecunde activități, profesorul *Țițeica* a fost invitat ani de-a rândul, alături de profesorul *Pompeiu* să expună știința ce o stăpâneau, la cea mai strălucită universitate din lume, la *Sorbona.*

An de an savanții români au fost audiați la *Sorbona* nu numai de studenții francezi, dar și de numeroși savanți străini veniți în acest scop, pentru că la aceste cursuri li se expuneau armele cele mai perfecționate de cercetare, care să le permită a cuceri domenii cât mai întinse din „Imperiu infinit al Științii".

Țițeica a fost apoi un mare profesor, un neîntrecut pedagog, ascultat, iubit și respectat de studenții săi. Atâtea generații au ascultat cu evlavie expunerea sa clară și luminată, care cuprindea nu numai știință pură, dar și îndemn, avânt și pasiune pentru cercetări originale.

† *Gheorghe Țițeica*

Izvorul de energie, cald și luminos, ce a fost regretatul profesor *Țițeica,* a emanat continuu raze binefăcătoare care au format atâți cercetători și profesori răspândiți în toate meleagurile țării.

O înaltă ținută morală, alături de acea științifică, s'a desprins încă din dinamica sa viața. Astfel în Congresul Matematic de la Turnu-Severin profesorul *Țițeica,* spunea între altele, discipolilor săi:

„Orice profesor de matematici, din orice colț al țării și de la orice școală, trebuie să fie apostol al specialității sale. Din felul cald și luminos cum își face lecțiile, din drumul drept și demn pe care îl urmează în viață, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă și sigură, curată ca cristalul, are o înaltă și admirabilă valoare educativă pentru viață.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieței noastre. Aceasta să fie contribuția specialității noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

Am cerut învoirea profesorului *Țițeica* și am obținut'o, ca această minunată gândire expusă într'o formă de o frumusețe neîntrecută și care oglindește

[1]) Cuvântare ținută de D-l *V. Alaci* cu ocazia înmormântării regretatului profesor *Gheorghe Țițeica.*

atât de clar înalta sa ţinută morală, să le pot publica la începutul fiecărui număr din *„Revista Matematică din Timişoara“* unde şi apar cu regularitate încă din 1933.

O a 3-a activitate tot atât de importantă a profesorului *Ţiţeica*, a fost şi aceea de a populariza ştiinţa în straturi cât mai largi şi în acest scop a publicat alături de marele şi iubitul profesor *Longinescu*, minunata revistă *„Natura“*. Tot pe această linie a activat, prin numeroase conferinţe la *„Casele Naţionale“*, alături de d-l General *Manolescu*.

Cât prestigiu a adus prezenţa profesorului *Ţiţeica* la *Academia Română* ca membru activ şi secretar general, cât de mare a fost contribuţia activităţii sale la *„Gazeta Matematică“* au spus-o cu toată autoritatea antivorbitorii mei.

Opera sa nemuritoare, va rămânea vecinic dovadă de puterea geniului românesc, va rămânea model şi îndreptar pentru generaţiile prezente şi viitoare.

Astăzi când sufletul marelui profesor *Ţiţeica* este descătuşat de întruchiparea materială şi pluteşte în zările senine ale nefiinţii, noi toţi ce l-am cunoscut, l-am iubit şi l-am respectat, conştienţi de golul imens ce o suferă ştiinţa şi şcoala românească, venim să depunem lacrimi şi flori, în faţa corpului neînsufleţit al marelui profesor, spiritul său luminat fiindu-ne vecinic călăuză.

TRIGONOMETRIA PATRATICĂ.

DE

V. ALACI

PROFESOR

(urmare)

PARTEA II-a.

TRIGONOMETRIA RECTILINIE PATRATICĂ.

48. In această a 2-a parte a lucrării, ne vom ocupa în primul rând de triunghiurile dreptunghice, triunghiurile semidreptunghice şi de acele triunghiuri în care diferenţa a două unghiuri este 45^0 stabilind câteva teoreme remarcabile.

Introducând apoi, pentru triunghiurile oarecare, noţiunea de *unghiuri asociate*, vom demonstra unele teoreme printre care ţinem să menţionăm o teoremă analoagă cu teorema sinusurilor din *Trigonometria circulară*. Vom stabili încă diferite relaţiuni şi teoreme între elementele liniare şi unghiulare ale unui triunghiu oarecare, precum şi diferite relaţiuni între *funcţiunile patratice* ale unghiurilor unui triunghiu.

Toate aceste teoreme şi relaţiuni îşi vor găsi apoi largi aplicaţiuni în problemele de rezolvirea triunghiurilor, probleme care vor fi soluţionate uneori mai simplu şi acestă afirmare o vom evidenţia în a 3-a parte a lucrării.

Vom folosi în cele ce urmează notaţiile obicinuite pentru elementele unui triunghiu.

TRIUNGHIURI DREPTUNGHICE.

49. **Teorema 1-a.** *Intr'un triunghiu dreptunghic, o catetă este egală cu suma catetelor înmulţită cu sinusul patratic al unghiului opus, sau cosinusul patratic al unghiului alăturat.*

Fie triunghiul dreptunghic A B C, fig. 8). Fiindcă $0 < B < 90^0$, avem:

$$(1) \qquad sp\,B = \frac{\operatorname{tg} B}{1 + \operatorname{tg} B},$$

conform primei relaţii din tabloul (11), (P. I-a).

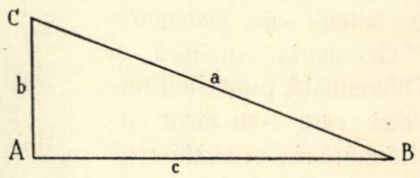


Fig. 8.

Cum ştim din *Trigonometria circulară* că,

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c},$$

relaţia (1) devine:

$$sp\,B = \frac{b}{b+c},$$

de unde:

$$(2) \qquad \boxed{b = (b+c)\,sp\,B}, \quad \text{sau:} \quad \boxed{b = (b+c)\,cp\,C},$$

fiindcă, $sp\,B = cp\,C$.

Analog:

$$(3) \qquad \boxed{c = (b+c)\,sp\,C = (b+c)\,cp\,B}.$$

Relaţiile (2) şi (3) demonstrează teorema.

Consecinţă. Cum avem cunoscute relaţiile

$$sp\,B = \frac{1}{Cp\,B}, \qquad sp\,C = \frac{1}{Cp\,C},$$

deducem din (2) şi (3),

(4) $\boxed{b + c = b\,Cp\,B = c\,Cp\,C}$,

adică: *Intr'un triunghiu dreptunghic, suma catetelor este egală cu una dintre ele înmulțită cu cosecanta patratică a unghiului opus.*

50. **Teorema 2-a.** *Intr'un triunghiu dreptunghic, o catetă este egală cu perimetru înmulțit cu sinusul patratic al jumătății unghiului opus.*

Demonstrație. Fie A B C un triunghiu dreptunghic, (fig. 9.

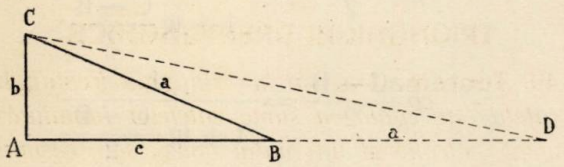


Fig. 9.

Prelungim latura A B cu $BD = a$ și triunghiul C B D fiind isoscel, avem:

$$\widehat{ADC} = \widehat{BCD} = \frac{B}{2}.$$

Teorema 1-a, aplicată triunghiului dreptunghic A C D, ne permite a scri

$$b = (b + c + a)\,sp\,\frac{B}{2},$$

și cum, $a + b + c = 2p$, avem:

(5) $\boxed{b = 2p\,sp\,\frac{B}{2}}$, analog: $\boxed{c = 2p\,sp\,\frac{C}{2}}$.

A 2-a teoremă este astfel stabilită.

Consecințe. 1°. Din relațiile (5) deducem,

(6) $\boxed{2p = b\,Cp\,\frac{B}{2} = c\,Cp\,\frac{C}{2}}$,

adică: *Intr'un triunghiu dreptunghic, perimetrul este egal cu una din catete înmulțită cu cosecanta patratică a unghiului opus.*

2°. Relațiile (5) se mai pot scri,

$$b = 2p - 2p\,cp\,\frac{B}{2}, \qquad c = 2p - 2p\,cp\,\frac{C}{2},$$

de unde,

(7) $\boxed{a + c = 2p\,cp\,\frac{B}{2}}$, $\boxed{a + b = 2p\,cp\,\frac{C}{2}}$,

adică: *Intr'un triunghiu dreptunghic, suma între ipotenuză și o catetă este egală cu perimetru înmulțit cu cosinusul patratic al jumătății unghiului alăturat catetei.*

3°. Din relațiile,

$$b = (b + c)\,sp\,B = 2p\,sp\,\frac{B}{2},$$

$$c = (b + c)\,sp\,C = 2p\,sp\,\frac{C}{2},$$

deducem identitatea:

(8) $\boxed{sp\,B\,sp\,\frac{C}{2} = sp\,C\,sp\,\frac{B}{2}}$.

51. **Teorema 3-a.** *Intr'un triunghiu dreptunghic, ipotenuza este egală cu perimetru înmulțit cu raportul între sinusul patratic al jumătății unuia din unghiurile ascuțite și sinusul acestui unghiu.*

Demonstrație. Fie triunghiul dreptunghic A B C, (fig. 9). *Teorema 2,* (No. 50) ne dă:

(9) $$b = 2p\,sp\,\frac{B}{2}.$$

De altă parte avem încă:

(10) $$b = a \sin B.$$

Din relațiile (9) și (10) deducem:

(11) $\boxed{a = 2p\,\frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin B}}$, analog: $\boxed{a = 2p\,\frac{sp\,\frac{C}{2}}{\sin C}}$.

52. **Teorema 4-a.** *Intr'un triunghiu dreptunghic A B C ($c > b$), avem relațiile:*

(12) $\boxed{c - b = 2c\,sp\,(45^0 - B)}$, $\boxed{c + b = 2c\,cp\,(45^0 - B)}$.

Demonstrație. Fiindcă unghiul $45^0 - B$ este în primul cadran, conform relațiilor (12) și (13) (No. 15, P. I-a) avem:

(13) $$sp\,(45^0 - B) = \frac{1 - \operatorname{tg} B}{2},$$

$$cp\,(45^0 - B) = \frac{1 + \operatorname{tg} B}{2},$$

Dar,

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c},$$

astfel că relațiile (13) devin:

$$sp\,(45^0 - B) = \frac{c - b}{2c}, \qquad cp\,(45^0 - B) = \frac{c + b}{2c}.$$

De aci deducem imediat relațiile (12).

Altă demonstrație. b, c fiind catetele unui triunghiu dreptunghic A B C, formăm un alt triunghiu dreptunghic $A_1 B_1 C_1$ (fig. 10) de catete

$$A_1 B_1 = c - b, \qquad A_1 C_1 = c + b.$$

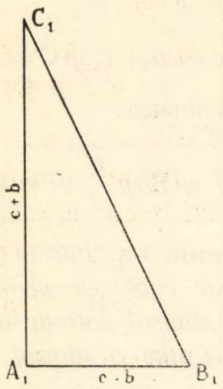


Fig. 10.

In triunghiul dreptunghic $A_1 B_1 C_1$, în virtutea *teoremei 1-a.* (No. 49), putem scri,

$$c - b = (c - b + c + b)\, sp\, C_1,$$
$$c + b = (c - b + c + b)\, sp\, B_1,$$

sau:

(14) $\quad c - b = 2c\, sp\, C_1, \qquad c + b = 2c\, sp\, B_1.$

Rămâne să exprimăm unghiurile C_1 și B_1 în funcție de unghiurile triunghiului dreptunghic A B C.

Pentru aceasta, observăm că în triunghiul dreptunghic $A_1 B_1 C_1$, avem succesiv:

$$\operatorname{tg} C_1 = \frac{c-b}{c+b} = \frac{1 - \frac{b}{c}}{1 + \frac{b}{c}} = \frac{1 - \operatorname{tg} B}{1 + \operatorname{tg} B} = \operatorname{tg}(45^0 - B).$$

De aci rezultă,

$$C_1 = 45^0 - B \quad \text{și deci:} \quad B_1 = 45^0 + B,$$

astfel că relațiile (14) devin,

$$c - b = 2c\, sp\,(45^0 - B),$$
$$c + b = 2c\, sp\,(45^0 + B) = 2c\, cp\,(45^0 - B),$$

tocmai relațiile din enunț.

A 3-a demonstrație. Știm că într'un triunghiu oarecare,

(15) $$\operatorname{tg} \frac{C - B}{2} = \frac{c-b}{c+b} \operatorname{cotg} \frac{A}{2}.$$

In cazul nostru,

$$\operatorname{cotg} \frac{A}{2} = 1,$$

astfel că (15) devine:

(16) $$\operatorname{tg} \frac{C - B}{2} = \frac{c-b}{c+b}.$$

Dar cum,

$$sp \frac{C-B}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{C-B}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{C-B}{2}},$$

$$cp \frac{C-B}{2} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \frac{C-B}{2}},$$

ținând seamă de relația (16) și simplificând, obținem:

$$sp \frac{C-B}{2} = \frac{c-b}{2c}, \qquad cp \frac{C-B}{2} = \frac{c+b}{2c}.$$

De aci deducem

$$c - b = 2c\, sp\,(45^0 - B), \qquad c + b = 2c\, cp\,(45^0 - B),$$

fiindcă,

$$\frac{C-B}{2} = \frac{(90^0 - B) - B}{2} = 45^0 - B.$$

53. **Teorema 5-a.** *Intr'un triunghiu dreptunghic, ipotenuza este egală cu suma produselor între catete și cosinusurile patratice ale jumătăților unghiurilor alăturate.*

Demonstrație. Inmulțind relațiile (7), (No. 50) respectiv cu c și b, apoi adunând avem:

$$ac + c^2 + ab + b^2 = 2p\left(c\, cp \frac{B}{2} + b\, cp \frac{C}{2}\right),$$

sau:

$$ac + ab + a^2 = 2p\left(b\, cp \frac{C}{2} + c\, cp \frac{B}{2}\right).$$

Scoatem a factor comun și simplificând cu $2p$, obținem:

(17) $$\boxed{a = b\, cp \frac{C}{2} + c\, cp \frac{B}{2}}.$$

Teorema este astfel stabilită.

Consecință. Relația (17), ținând seamă că,

$$b = a \sin B, \qquad c = a \sin C,$$

devine:

$$\text{(18)} \qquad \boxed{\sin B\, cp\frac{C}{2} + \sin C\, cp\frac{B}{2} = 1.}$$

TRIUNGHIURI SEMIDREPTUNGHICE.

Un triunghiu cu un unghiu de 45^0 este un *triunghiu semidreptunghic.*

54. **Teorema 1-a**. *Intr'un triunghiu semidreptunghic, între laturile b şi c ale unghiului de 45^0, există relaţia,*

$$\text{(19)} \qquad \boxed{b = c\sqrt{2}\, sp\, B},$$

dacă unghiul B *nu este obtuz şi relaţia,*

$$\text{(20)} \qquad \boxed{b = \frac{c}{\sqrt{2}\, sp\,(45^0 + B)}},$$

dacă B *este obtuz.*

Demonstraţie. Fie triunghiul semidreptunghic A B C, (A = 45^0), în care B de exemplu nu este obtuz, (fig. 11).

Ducem din C înălţimea C D şi triunghiul A D C fiind isoscel, avem:

$$\text{(21)} \qquad C\,D = A\,D.$$

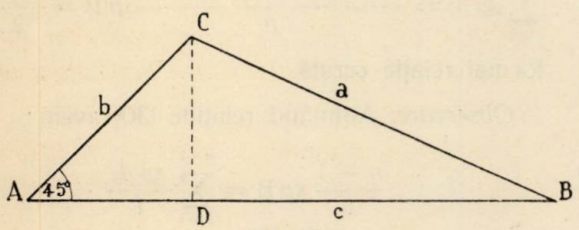


Fig. 11.

Acum, în triunghiul dreptunghic C D B aplicăm *teorema 1-a,* (No. 49) şi având în vedere relaţia (21) şi figura, putem scri:

$$\text{(22)} \quad C\,D = (C\,D + D\,B)\, sp\, B = (A\,D + D\,B)\, sp = c\, sp\, B.$$

De altă parte, în triunghiul dreptunghic A D C,

$$C\,D = b \sin 45^0 = \frac{b}{\sqrt{2}},$$

astfel că relaţia (22) devine,

$$b = c\sqrt{2}\, sp\, B,$$

ceiace trebuia arătat.

Dacă însă unghiul B este obtuz, C este ascuţit şi putem aplica laturei *c* formula (19), adică,

$$c = b\sqrt{2}\, sp\, C = b\sqrt{2}\, sp\,(45^0 + B),$$

unghiurile C, $45^0 + B$ fiind suplimentare.

Din aci deducem,

$$b = \frac{c}{\sqrt{2}\, sp\,(45^0 + B)}$$

tocmai relaţia (20).

Consecinţă. Intr'un triunghiu semidreptunghic (A=45^0), *in care* B *şi* C *nu sunt obtuze, avem relaţia:*

$$\text{(23)} \qquad \boxed{\frac{b^2}{sp\, B} = \frac{c^2}{sp\, C}}.$$

In virtutea *teoremei 1* (No. 54), avem

$$b = c\sqrt{2}\, sp\, B, \qquad c = b\sqrt{2}\, sp\, C.$$

Inmulţind prima relaţie cu *b* şi a 2-a cu *c*, deducem uşor relaţia (23).

55. **Teorema 2-a**. *Intr'un triunghiu semidreptunghic, o latură a unghiului de 45^0 este egală cu suma celorlalte două laturi înmulţită cu $\sqrt{2}$ şi cu sinusul patratic al jumătăţii unghiului opus.*

Dacă A B C este un triunghiu semidreptunghic, (A = 45^0, fig. 11) avem de stabilit relaţiile:

$$\text{(24)} \quad \boxed{b = (a+c)\sqrt{2}\, sp\frac{B}{2}}, \quad \boxed{c = (a+b)\sqrt{2}\, sp\frac{C}{2}}.$$

Demonstraţie. Ducem înălţimea C D şi triunghiul A C D fiind isoscel, avem:

$$\text{(25)} \qquad C\,D = A\,D.$$

Teorema 2-a de la triunghiurile dreptungice (No. 50) aplicată în triunghiul dreptunghic C D B, apoi relaţia (25) şi figura, ne permit a scri succesiv:

$$\text{(26)} \qquad C\,D = (C\,D + D\,B + B\,C)\, sp\frac{B}{2} =$$

$$(A\,D + D\,B + B\,C)\, sp\frac{B}{2} = (a+c)\, sp\frac{B}{2}.$$

De altă parte,

$$C\,D = \frac{b}{\sqrt{2}},$$

astfel că relaţia (26) devine

$$b=(a+c)\sqrt{2}\,sp\frac{B}{2} \text{ şi analog: } c=(a+b)\sqrt{2}\,sp\frac{C}{2}.$$

Altă demonstraţie. In triunghiul semidreptunghic A B C (A = 45°, fig. 12), ducem bisectoarea B D a unghiului B şi conform *teoremei 1-a* (No. 54), în triunghiul semidreptunghic A B D, avem:

(27) $$AD=c\sqrt{2}\,sp\frac{B}{2}, \quad \text{fiindcă,} \quad \frac{B}{2}<90°.$$

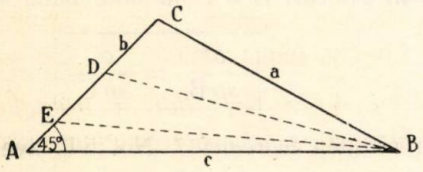


Fig. 12

De altă parte ştim că, *bisectoarea unui unghiu într'un triunghiu împarte latura opusă în părţi proporţionale cu celelalte două laturi,* astfel că avem:

$$\frac{AD}{c}=\frac{DC}{a}=\frac{b}{a+c},$$

deci:

$$AD=\frac{bc}{a+c}.$$

Inlocuind această valoare în relaţia (27), deducem:

$$b=(a+c)\sqrt{2}\,sp\frac{B}{2}, \text{ analog: } c=(a+b)\sqrt{2}\,sp\frac{C}{2}.$$

56. **Teorema 3-a.** *Dacă în triunghiul semidreptunghic* A B C (A = 45°), *în care* B *nu este obtuz, se ia pe latura* A C *a unghiului de* 45° *un punct* E *astfel ca,*

(28) $$\boxed{AC=k.AE},$$

atunci avem şi relaţia:

(28′) $$\boxed{sp\,B=k.sp\,\beta}, \quad (\beta=\widehat{ABE}).$$

Demonstraţie. In triunghiurile semidreptunghice A B C şi A B E (fig. 12), *teorema 1-a,* (No. 54), ne permite a scri:

$$AC=c\sqrt{2}\,sp\,B, \qquad AE=c\sqrt{2}\,sp\,\beta.$$

Substituind aceste valori în relaţia de condiţie (28) şi simplificând, avem

$$sp\,B=k.sp\,\beta,$$

tocmai relaţia cerută.

Aplicaţie. *Dacă în fig. 12., împărţim pe* A C *în n părţi egale prin punctele de diviziune* $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ *şi notăm,*

$$\beta_i=\widehat{ABB_i}, \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1),$$

atunci avem următoarea însumare:

(29) $$\boxed{\sum_{i=1}^{n-1} sp\,\beta_i=\frac{n-1}{2}\,sp\,B}.$$

In adevăr, fiindcă,

$$AC=\frac{n}{i}AB_i,$$

conform *teoremei 3-a* (No. 56) avem şi relaţia

(30) $$sp\,B=\frac{n}{i}sp\,\beta_i, \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1)$$

De aci deducem,

$$sp\,\beta_i=\frac{i}{n}sp\,B$$

şi însumând aceste relaţii, obţinem:

$$\sum_{i=1}^{n-1} sp\,\beta_i=\frac{1+2+\cdots+(n-1)}{n}sp\,B=\frac{n-1}{2}sp\,B,$$

tocmai relaţia cerută.

Observare. Adunând relaţiile (30) avem:

$$\frac{n-1}{n}sp\,B=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{sp\,\beta_i}{i}.$$

Pentru $n=\infty$ deducem următoarea serie remarcabilă:

(31) $$\boxed{sp\beta_1+\frac{1}{2}sp\beta_2+\frac{1}{3}sp\beta_3+\cdots+\frac{1}{n}sp\beta_n+\cdots=sp\,B}.$$

TRIUNHRIURI IN CARE DIFERENŢA A DOUĂ UNGHIURI ESTE 45°.

57. **Teoremă.** *Dacă în triunghiul* A B C *avem de exemplu*

$$B=A+45°,$$

atunci există relaţia:

(32) $$\boxed{a = b\sqrt{2}\,sp\,A}.$$

Demonstrație. Fie A B C un triunghiu în care $B = A + 45^0$, (fig. 13).

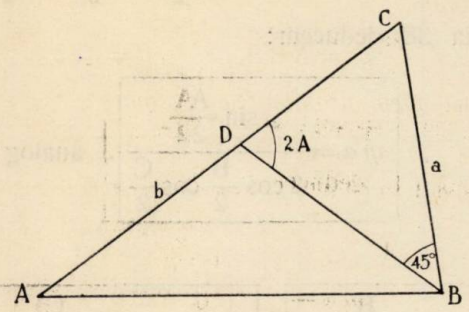


Fig. 13.

Ducem B D astfel ca

$$\widehat{CBD} = 45^0,$$

atunci,

(33) $$BD = AD, \qquad \widehat{BDC} = 2A.$$

In triunghiul semidreptunghic B C D, *teorema 2,* (No. 55), relațiile (33) și figura ne permit a scri,

$$BC = (BD + DC)\sqrt{2}\,sp\,A = (AD + DC)\sqrt{2}\,sp\,A,$$

sau,

$$a = b\sqrt{2}\,sp\,A,$$

ceeace demonstrează teorema.

Altă demonstrație. Aplicând în triunghiul A B C, (fig. 13) *teorema sinusurilor din Trigonometria circulară,* avem,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin(45^0 + A)},$$

de unde,

(34) $$a = \frac{b \sin A}{\sin(45^0 + A)} = b\sqrt{2}\,sp\,A,$$

fiindcă având $A < 90^0$,

$$\frac{\sin A}{\sqrt{2}\sin(45^0 + A)} = sp\,A,$$

conform relației (14), (No. 18, P. I-a).

Observare. Expresiunea lui a în funcție de b și A, este mai simplă în *Trigonometria patratică* de cât în *Trigonometria circulară,* cum se vede din relațiile (34).

TRIUNGHIURI OARECARE.

Unghiuri asociate ale unui triunghiu oarecare.

58. Fie a, b, c laturile unui triunghiu oarecare A B C. Construim cu ele trei triunghiuri dreptunghice având respectiv catetele: $a,\ b + c$; $b,\ c + a$; $c,\ a + b$. *Numim unghiuri asociate ale triunghiului* A B C, *unghiurile* α, β, γ *ce se opun respectiv catetelor* a, b, c *în cele trei triunghiuri construite.*

Evident că unghiurile α, β, γ sunt mai mici ca 45^0.

Introducând această noțiune, vom demonstra două teoreme remarcabile.

59. **Teorema 1-a.** *Intr'un trlunghiu oarecare* A B C *în care* α, β, γ *sunt unghiurile sale asociate, avem :*

(35) $$\boxed{\frac{a}{sp\,\alpha} = \frac{b}{sp\,\beta} = \frac{c}{sp\,\gamma} = \frac{b+c}{cp\,\alpha} = \frac{c+a}{cp\,\beta} = \frac{a+b}{cp\,\gamma} = 2p}.$$

Demonstrație. Fie $a, b, c, 2p$ laturile și perimetrul unui triunghiu oarecare A B C. Construim triunghiul dreptunghic D E F (fig. 14) de catete,

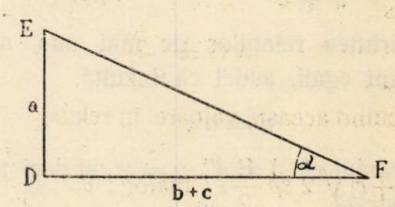


Fig. 14.

$$DE = a, \qquad DF = b + c$$

și atunci unghiul α opus catetei D E este prin definiție *unghiul asociat* corespunzător laturei a.

Aplicând triunghiului dreptunghic D E F teorema 1-a, (No. 49), avem:

$$a = 2p\,sp\,\alpha, \qquad b + c = 2p\,cp\,\alpha.$$

Analog stabilim relațiile:

$$b = 2p\,sp\,\beta, \qquad c + a = 2p\,cp\,\beta,$$
$$c = 2p\,sp\,\gamma, \qquad a + b = 2p\,cp\,\gamma.$$

Din aceste relații deducem cu ușurință:

$$\frac{a}{sp\,\alpha} = \frac{b}{sp\,\beta} = \frac{c}{sp\,\gamma} = \frac{b+c}{cp\,\alpha} = \frac{c+a}{cp\,\beta} = \frac{a+b}{cp\,\gamma} = 2p.$$

Teorema este astfel stabilită.

Consecință. Observând că suma numărătorilor primelor trei rapoarte este de $2p$ urmează:

(36) $$\boxed{sp\,\alpha + sp\,\beta + sp\,\gamma = 1}.$$

Teorema 2-a. *Două triunghiuri asemenea au unghiurile asociate respectiv egale.*

Demonstrație. Fie triunghiurile asemenea ABC, $A'B'C'$. Laturile lor corespunzătoare sunt proporționale, adică:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Construim acum două triunghiuri dreptunghice DEF, $D'E'F'$ având catetele $DE = a$, $DF = b + c$ și $D'E' = a'$, $D'F' = b' + c'$.

Unghiurile opuse catetelor a și a' în aceste triunghiuri dreptunghice sunt prin definiție *unghiurile asociate* α și α' corespunzătoare.

In aceste triunghiuri dreptunghice DEF și $D'E'F'$ avem însă:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b+c}, \qquad \operatorname{tg}\alpha' = \frac{a'}{b'+c'}.$$

Dar în virtutea relațiilor de mai sus, membrii a-i 2-lea sunt egali, astfel că rezultă.

$$\alpha = \alpha'.$$

Analog arătăm că $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ și deci teorema este demonstrată.

Calcularea unghiurilor α, β, γ.

60. Ne propunem a calcula *unghiurile asociate* α, β, γ în funcție de unghiurile A, B, C ale triunghiului ABC.

In adevăr, știm că într'un triunghiu oarecare,

$a = 2R\sin A$, $\quad b = 2R\sin B$, $\quad c = 2R\sin C$,

astfel că relațiile (35), (unele rapoarte fiind lasate la o parte), devin:

(37) $$\frac{\sin A}{sp\,\alpha} = \frac{\sin B}{sp\,\beta} = \frac{\sin C}{sp\,\gamma} = \frac{p}{R}.$$

De aci deducem având în vedere relația (36):

(38) $$\frac{\sin A}{sp\,\alpha} = \sin A + \sin B + \sin C.$$

Cum,

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2},$$

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

din relația (38) deducem:

$$\boxed{sp\,\alpha = \frac{\sin\frac{A}{2}}{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}},$$ analog:

(39)

$$\boxed{sp\,\beta = \frac{\sin\frac{B}{2}}{2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}}, \quad \boxed{sp\,\gamma = \frac{\sin\frac{C}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}}.$$

Alte formule. 1°. Avem evident:

$$cp\,\alpha = 1 - sp\,\alpha = 1 - \frac{\sin\frac{A}{2}}{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} =$$

$$\frac{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \cos\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)}{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

Dezvoltând $\cos\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)$ și simplificând, obținem:

$$\boxed{cp\,\alpha = \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}},$$ analog:

(40)

$$\boxed{cp\,\beta = \frac{\cos\frac{C-A}{2}}{2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}}, \quad \boxed{cp\,\gamma = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}}.$$

2°. Avem evident încă:

$$1 - 2\,sp\,\alpha = 1 - \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha).$$

De altă parte:

$$(42)\qquad 1-2\,sp\,\alpha=1-\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=$$

$$\frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\cos\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Din (41), (42) şi analoagele lor, deducem următoarele formule remarcabile care permit a calcula α, β, γ când cunoaştem unghiurile A, B, C:

$$(43)\qquad \boxed{\operatorname{tg}(45^0-\alpha)=\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}},\quad \boxed{\operatorname{tg}(45^0-\beta)=\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}},\quad \boxed{\operatorname{tg}(45^0-\gamma)=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}.$$

Observări. 1°. In relaţiile (39), putem face să apară în membrii al 2-lea în locul *funcţiunilor circulare, funcţiunile patratice* ale unghiurilor A, B, C. Avem astfel succesiv din relaţia (42), (No. 60).

$$sp\,\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{2}=$$

$$\frac{cp\frac{B}{2}\,cp\frac{C}{2}-sp\frac{B}{2}\,sp\frac{C}{2}}{2\,cp\frac{B}{2}\,cp\frac{C}{2}}=$$

$$\frac{\left(1-sp\frac{B}{2}\right)\left(1-sp\frac{C}{2}\right)-sp\frac{B}{2}\,sp\frac{C}{2}}{2\,cp\frac{B}{2}\,cp\frac{C}{2}}.$$

Deducem de aci,

$$(44)\qquad \boxed{sp\,\alpha=\frac{cp\frac{B}{2}-sp\frac{C}{2}}{2\,cp\frac{B}{2}\,cp\frac{C}{2}}},\quad \text{analog:}$$

$$\boxed{sp\,\beta=\frac{cp\frac{C}{2}-sp\frac{A}{2}}{2\,cp\frac{C}{2}\,cp\frac{A}{2}}},\quad \boxed{sp\,\gamma=\frac{cp\frac{A}{2}-sp\frac{B}{2}}{2\,cp\frac{A}{2}\,cp\frac{B}{2}}}.$$

2°. Invers, din relaţiile (43) putem afla unghiurile A, B, C în funcţie de α, β, γ, înmulţindu-le câte două şi împărţind cu a 3-a, avem astfel:

$$\boxed{\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}=\frac{\operatorname{tg}(45^0-\beta)\operatorname{tg}(45^0-\gamma)}{\operatorname{tg}(45^0-\alpha)}},\quad \text{analog:}$$

$$(45)\qquad \boxed{\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}=\frac{\operatorname{tg}(45^0-\gamma)\operatorname{tg}(45^0-\alpha)}{\operatorname{tg}(45^0-\beta)}},$$

$$\boxed{\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}=\frac{\operatorname{tg}(45^0-\alpha)\operatorname{tg}(45^0-\beta)}{\operatorname{tg}(45^0-\gamma)}}.$$

3°. Impărţind relaţiile (39) şi (40), obţinem încă următoare formule remarcabile:

$$(46)\qquad \boxed{\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}},\quad \boxed{\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C-A}{2}}},\quad \boxed{\operatorname{tg}\gamma=\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}}.$$

Unghiurile asociate ale unui triunghiu dreptunghic.

61. Pentru $A=90^0$, avem $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1$ şi ultimele două relaţii din (43) devin:

$$\operatorname{tg}(45^0-\beta)=\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{B}{2}\right),$$

$$\operatorname{tg}(45^0-\gamma)=\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{C}{2}\right),$$

fiindcă,

$$\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=45^0.$$

Rezultă astfel:

$$(47)\qquad \boxed{\beta=\frac{B}{2}},\qquad \boxed{\gamma=\frac{C}{2}}.$$

Observări. 1°. Relaţiile (47) se pot stabili şi direct astfel:

In triunghiul dreptunghic A B C (fig. 15), prelungind A B cu B D = a, obţinem triunghiul A D C

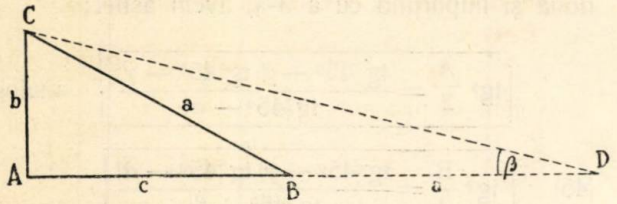


Fig. 15.

de catete b, $c+a$ şi unghiul D, prin definiţie, este *unghiul asociat* β corespunzător lui b, deci,

$$\beta = D.$$

De altă parte triunghiul C B D fiind isoscel, urmează,

$$\beta = \frac{B}{2}, \quad \text{analog stabilim:} \quad \gamma = \frac{C}{2}.$$

2°. In virtutea relaţiilor (47), relaţiile (35) ce conţin pe β şi γ, devin,

$$(48) \qquad \boxed{\frac{b}{sp\,\frac{B}{2}} = \frac{c}{sp\,\frac{C}{2}} = \frac{a+c}{cp\,\frac{B}{2}} = \frac{a+b}{cp\,\frac{C}{2}} = 2p},$$

care sub o formă concentrată conţin enunţul *teoremei* 2, (No. 50) şi formulele (7) din consecinţa acestei teoreme.

(Va urma)

NOTE MATEMATICE

22. — *Sur l'identité*

$$(X^3-Y^3)(Y^3-Z^3)(Z^3-X^3)(X^3+Y^3+Z^3) =$$
$$[X(Y^3-Z^3)]^3+[Y(Z^3-X^3)]^3+[Z(X^3-Y^3)]^3.$$

Démonstration.

a) par développement des produits et des cubes.

b) on part de l'égalité

$$x+y+z=(x+\alpha t)+(y+\beta t)+(z+\gamma t),$$

satisfaite quel que soit t si

$$(1) \qquad \alpha+\beta+\gamma=0.$$

Considérons ensuite l'égalité

$$x+y+z=(x+\alpha t)(y+\beta t)(z+\gamma t).$$

Pour y satisfaire, nous poserons

$$(2) \qquad \frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}+\frac{\gamma}{z}=0.$$

Il reste l'équation en t:

$$\alpha\beta\gamma t+\beta\gamma x+\gamma\alpha y+\alpha\beta z=0.$$

Les conditions (1) et (2) sont satisfaites si nous prenons

$$\begin{cases} \alpha = x(y-z) \\ \beta = y(z-x) \\ \gamma = z(x-y) \end{cases}$$

$$t=-\frac{(y-z)(z-x)+(z-x)(x-y)+(x-y)(y-z)}{(y-z)(z-x)(x-y)}.$$

Calculons p. ex.

$$\frac{x+\alpha t}{x(y-z)}=-\frac{(y-z)(z-x)+(x-y)(y-z)}{(y-z)(z-x)(x-y)}$$

$$=-\frac{(y-z)(z-x+x-y)}{(y-z)(z-x)(x-y)}=\frac{(y-z)^2}{(y-z)(z-x)(x-y)}.$$

Donc

$$\boxed{\begin{array}{l}(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z)= \\ x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3\end{array}}.$$

[Nous avons d'ailleurs aussi

$$(y-z)^3(z-x)^3(x-y)^3(x.y.z)=$$
$$x(y-z)^3.y(z-x)^3.z(x-y)^3,$$

relation évidente].

Remplaçons dans la relation qui précède

x par X^3, y par Y^3, z par Z^3;

nous trouvons l'identité à démontrer.

Exemples numériques.

a) $X=3$, $Y=2$, $Z=1$,

$$(3^3-2^3)(2^3-1^3)(1^3+3^3)(3^3+2^3+1^3)=$$
$$19^3+(-52)^3+21^3 (=-124.488).$$

b) $X=5$, $Y=3$, $Z=2$,

$$(5^3-3^3)(3^3-2^3)(5^3-2^3)(5^3+3^3+2^3)=$$
$$\overset{(-14^6)}{\uparrow}$$
$$351^3+(-196)^3+(-95)^3=34.856.640.$$

c) $X=5,\ Y=4,\ Z=3,$

$$(5^3-4^3)(4^3-3^3)(5^3-3^3)(\underbrace{5^3+4^3+3^3}) =$$

$$392^3-183^3-185^3,$$

ou

$$(5^3-4^3)(4^3-3^3)(5^3-3^3)\cdot 6^3 = 392^3-183^3-185^3$$

$$(=47.776.176).$$

d) $X=8,\ Y=6,\ Z=1,$

$$(8^3-6^3)(6^3-1^3)(8^3-1^3)(\underbrace{8^3+6^3+1^3}) =$$

$$3066^3-296^3-1720^3,$$

ou

$$\boxed{(8^3-6^3)(6^3-1^3)(8^3-1^3)\cdot 9^3 = 3066^3-296^3-1720^3}$$

$$(=23.707.109.160).$$

A. GLODEN

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLIV, No. 5, Ianuarie 1939 *Gheorghe Kirilov*, de *I. Ionescu*. Elementele lui *Euclide* de *I. Ionescu* Congresul matematicianilor, de *I. I.* Asupra modulelor zerorilor polinoamelor, de *Th. Angheluță*. Asupra dreptei lui *Simson-Wallace*, de *C. Ionescu-Bujor*. Note matematice. Probleme propuse și rezolvate.

2. *Pitagora*, revistă de matematici, anul IV, No. 4, Ianuarie 1939. Asupra unor arii, de *C. Cosniță*. O teoremă relativă la patrulaterul strâmb, de *I. I. Țiteica*. Note matematice, probleme propuse și rezolvate.

3. *C. C. Teodorescu*. Memoriu de: Titluri și lucrări.

4. *Plautius Andronescu*. Die ergebnisse der wissenschaftlichen Untersuchung der Magnetischen Kreise mit hilfe der Mathematik.

5. *Victor N. Lațiu*. Contribuțiuni la studiul microfiziografic al granitului de la Șoimoș-Radna. (Jud. Arad).
(Extrait du „Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timișoara, Tome 8, Fasc. 3—4).

6. *C. Bakonyi*. Rolul technicei și al inginerului în criza economică.

PROBLEME REZOLVATE

1334. — *Se dă un trapez* ABCD *cu laturile* AD *și* BC *paralele și fie* O *intersecția diagonalelor. Se prelungește diagonala* AC *cu segmentele* $AA'=OC$ *și* $CC'=OA$, *iar diagonala* BD *cu segmentele* $BB'=OD$ *și* $DD'=OB$. *Notăm*: $M\equiv(AB, A'B')$, $N\equiv(CD, C'D')$, $P\equiv(AB, C'D')$, $Q\equiv(CD, A'D')$. *Să se arate că dreptele* MN *și* PQ *sunt paralele cu laturile* $A'D'$, $B'C'$ *ale paralelogramului* $A'B'C'D'$ *și cu laturile* AD, BC *ale trapezului.*

GH D. SIMIONESCU

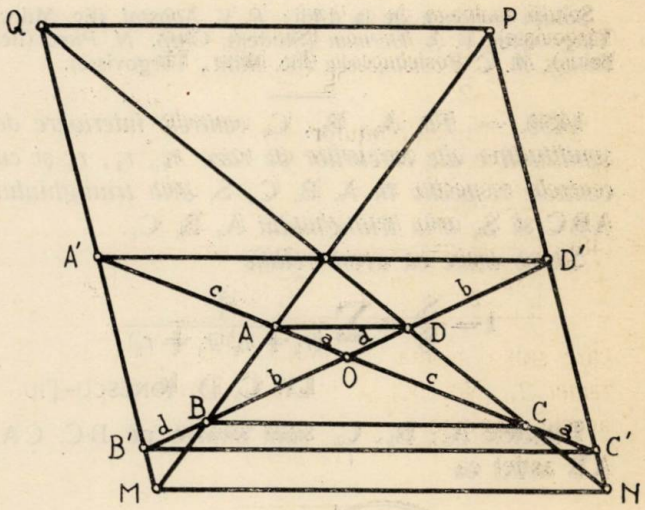
Notăm pentru simplificare:

$OA=a;\quad OB=b;\quad OC=c;$ și $OD=d.$

Triunghiurile BOC, AOD fiind asemeni, dau

$$\frac{b}{d}=\frac{c}{a},$$

de unde rezultă că $B'C'$, BC sunt paralele. La fel se arată că AD este paralelă cu $A'D'$.



Triunghiul $OA'B'$ tăiat de transversală AB dă

$$\frac{MB'}{MA'}\cdot\frac{AA'}{AO}\cdot\frac{BO}{BB'}=1,$$

(1) *** $$\frac{MB'}{MA'}=\frac{a\times d}{b\times c}.$$

La fel, din triunghiul $OC'D'$ tăiat de transversala CD se scoate

(2) $$\frac{NC'}{ND'}=\frac{a\times d}{c\times b}.$$

Din (1) și (2) rezultă

$$\frac{MB'}{MA'}=\frac{NC'}{ND'} \quad *** \quad \frac{MB'}{A'B'}=\frac{NC'}{C'D'}.$$

Insă $A'B'=C'D'$ ca laturi opuse ale paralelogramului $A'B'C'D'$, deci

$$MB' = NC'$$

ceia ce arată că MN este paralelă cu $B'C'$, deci şi cu BC.

Considerând triunghiurile $OA'B'$, $OC'D'$ tăiate respectiv de transversalele CD şi AB găsim

$$\frac{QA'}{QB'} = \frac{2cd+ad}{2cd+bc} \quad \text{şi} \quad \frac{PD'}{PC'} = \frac{2ab+ad}{2ab+bc},$$

însă $a \times b = c \times d$, deci

$$\frac{QA'}{QB'} = \frac{PD'}{PC'} \quad {}^{**} \quad QA' = PD',$$

ceia ce arată că PQ este paralelă cu $A'D'$, deci cu AD.

Rezultă că figura $MNPQ$ este paralelogram.

Soluţii analoage de la d-nii: *R. V. Apostol* (lic. Milit., Târgovişte), *V. A. Herman* (Student, Cluj), *N. Popa* (lic. Beiuş), *M. C. Postelnicescu* (lic. Milit, Târgovişte).

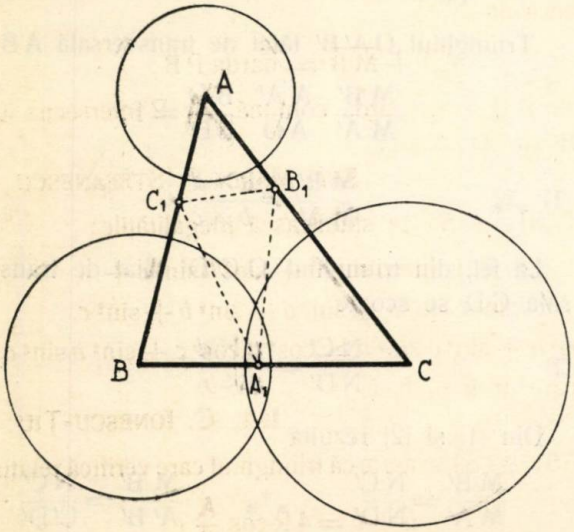
1459. — *Fie* A_1, B_1, C_1 *centrele interioare de similitudine ale cercurilor de raze* r_1, r_2, r_3 *şi cu centrele respectiv în* A, B, C; S, *aria triunghiului* ABC *şi* S_1 *aria triunghiului* $A_1B_1C_1$.

Să se arate că avem relaţia

$$1 - \frac{S_1}{S} = \sum \frac{r_1^2}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)}.$$

LT. C. D. IONESCU-ŢIU

Punctele A_1, B_1, C_1 sunt situate pe BC, CA, AB astfel ca



$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{r_1}{r_2}, \quad \text{sau} \quad \frac{AC_1}{AB} = \frac{r_1}{r_1+r_2},$$

analog

$$\frac{AB_1}{AC} = \frac{r_1}{r_1+r_3}.$$

Triunghiurile AB_1C_1, ABC având unghiul A, comun, ariile lor S_a şi S, se raportă ca produsul laturelor adiacente

$$\frac{S_a}{S} = \frac{AC_1}{AB} \cdot \frac{AB_1}{AC} = \frac{r_1^2}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)},$$

deci:

$$1 - \frac{S_1}{S} = \frac{S-S_1}{S} = \sum \frac{S_a}{S} = \sum \frac{r_1^2}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)},$$

ceiace era de dovedit.

Soluţii date de d-nii: *Petre V. Cazanacli* (Chişinău) şi *Dumitru D. Matei* (Iaşi).

Observare. 1°, Dacă am continua calculele, am afla

$$\frac{S_1}{S} = \frac{2r_1r_2r_3}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)(r_2+r_1)}$$

rezultat cunoscut, când punctele A_1, B_1, C_1 sunt definite ca cevienele punctului de coordonate baricentrice r_1, r_2, r_3.

2°- Analog, în spaţiu: dacă V_1 este volumul solidului format de cele 6 centre interioare de similitudine a 4 sfere, de raze r_1, r_2, r_3, r_4 şi dacă V este volumul tetraedului format de centrele lor, avem

$$1 - \frac{V_1}{V} = \Sigma \frac{r_1^3}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)(r_1+r_4)}.$$

N. M.

1515. — *Să se demonstreze că piciorul bisectoarei unghiului* A *al triunghiului* ABC, *poate fi mijlocul segmentului determinat de piciorul înălţimei* AH *şi al medianei* AM. *Să se construiască triunghiul* ABC *în acest caz, cunoscând latura* BC *şi unghiul* A.

G-L GH BUICILU

Soluţie dată de d-l *M. A. Negrea* (Brăila).

Fie O centrul cercului circumscris unui astfel de triunghiu, M şi A_1 mijlocul laturei şi arcului BC, A' şi H piciorul bisectoarei şi al înălţimei. Dacă

$$(1) \qquad MA' = A'H,$$

triunghiurile dreptunghice $A'MA_1$ şi $A'HA$ sunt egale şi deci

$$(2) \qquad MA_1 = AH.$$

Dacă se calculează elementele din (1) sau (2) în funcţie de laturile *a, b, c* ale unui triunghiu, *) se

*) A se vedea problema 4227 propusă de d-l G-l *Gh. Buicliu* şi rezolvată în *Gazeta Matematică*, Vol XLI pag. 439.

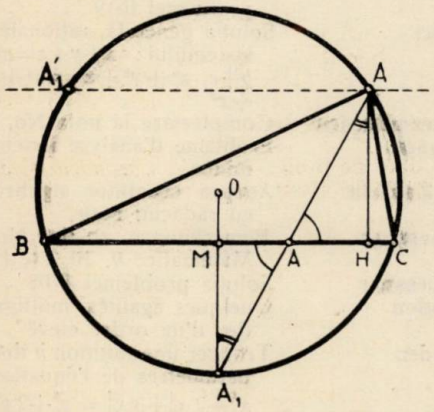
găsește că aceste condițiuni sunt echivalente cu

(3) $$b+c=a\sqrt{2},$$

și cum $\sqrt{2}>1$, avem

$$b+c>a,$$

deci condiția (3) poate fi satisfăcută de laturile unor triunghiuri. Concluzia: *Când* A′ *este mijlocul lui* M H *avem* (3) *și reciproc.*



Presupunând date B C și unghiul $\hat{A}$, se pot construi triunghiurile care îndeplinesc condițiile enunțului, în modul următor: Pe B C se descrie un segment de cerc O capabil de unghiul A. Se duce AA_1' paralel cu B C și la distanța A H = M A_1. Se obțin două triunghiuri egale B A C și B A_1' C care satisfac condițiile enunțului. Construcția este totdeauna posibilă.

Din condiția (3) se vede că în triunghiul cu caracteristica indicată în enunț laturile A B, A C au suma egală cu latura patratului înscris în cercul de rază C B.

Soluțiuni analoage date de d-nii: *V. L. Florescu, Oct. Gh. Rădulescu* (lic. Milit., Târgoviște) și *Stefănescu D. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu)

D-nii *N. V. Nedelcu, D. V. Nistorescu* și *M. Petrescu* au calculat segmentele A′ M, A′ H în funcție de laturi și prin egalare au dedus condiția (3), rezolvând foarte bine problema.

PROBLEME PROPUSE

1744. — Să găsească trei numere întregi consecutive știind că dacă se înmulțește unul din ele cu suma celoralte două se obține la produs un număr format din acestea scrise unul după altul.

G-l Gh. Buicliu

1745. — Să se afle patratele perfecte, care mărite cu de 64 de ori rădăcina lor patrată să dea tot patrate perfecte.

Ionel I. Stamate

1746. — Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{m^2+x+2m\sqrt{x}}=\sqrt{x+m}+\sqrt{x}.$$

Nicolae I. Cristea

1747. — Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \dfrac{y+z}{a}=a\pm\sqrt{a^2-x} \\ \dfrac{z+x}{b}=b\pm\sqrt{b^2-y} \\ \dfrac{x+y}{c}=c\pm\sqrt{c^2-z} \end{cases}$$

V. Thébault

1748. — Să se demonstreze că derivata funcțiunei

$$x-\lg\sqrt[4]{1-2\,sp\,x\,cp\,x}+\frac{\operatorname{arc\,tg}(1-2\,sp\,x)}{2},$$

este $cp\,x$, dacă $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ ($sp\,x$ și $cp\,x$, înseamnă *sinusul patratic de* x și cosinusul patratic de x).

V. Alaci

1749. — Se dau două cercuri O_1 și O_2, cercul O_1 trecând prin centrul lui O_2. Să se demonstreze că orice punct M de pe cercul O_1 se bucură de proprietatea:

$$\overline{MA}+\overline{MB}=\text{coarda P B};$$

unde A B este coarda comună, iar P intersecția lui M B cu cercul O_2.

S-t. Marin F. Stefanescu

1750. — Să se stabilească inegalitățile:

$$1+\sin^2 a\sin^2 b+\sin^2 b\sin^2 c+$$
$$\sin^2 c\sin^2 a\geq\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c.$$
$$\cos^2 a+\sin^2 a\sin^2 b\geq\cos^2 a\cos^2 c+\sin^2 b\sin^2 c,$$

oricare ar fi a, b, c.

L-t. C. Ionescu-Țiu

1751. — Să se arate că triunghiul care verifică relația

$$b+c=4R\cos\frac{A}{2},$$

este isoscel, notațiile fiind cele obicinuite.

Martian V. Murgu

TABLA DE MATERII

I. ARTICOLE.

a) Aritmetica și Teoria Numerelor.

		Pag.
A. Gloden	Sur la représentation de certains nombres par des sommes de carrés . . .	86

b) Algebra.

Gh. Constantinescu	Soluțiunile întregi ale ecuației $x^3 - a y^3 = b$	25
A. Gloden	Sur les chaînes bigrades. .	37
C. C. Teodorescu	Permutări cu condițiuni . .	41
Eug. Visa	O generalizare a coeficienților binomiali	49
Gh. Constantinescu	Soluțiunile întregi ale ecuațiunii $x^3 - 10^n y^3 = z$.	61, 73
M. Botez	O clasă nouă de identități .	86
A. Gloden	Sur les solutions entières de l'équation diophantienne $x^3 + a x y + b y^3 = z^k$.	97

c) Geometria.

O. N. Țino	O teoremă importantă de Geometrie elementară . .	3
N. N. Mihăileanu	Asupra cercurilor Apollonius	13

d) Trigonometria.

V. Alaci	Trigonometria patratică . .	109 121, 138

e) Aplicațiile geom. ale Calc. dif. și integral.

C. Bors	O proprietate a sferei osculatoare la o curbă strâmbă	99

II. REDACȚIONALE.

* * *	Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timișoara	1-2
V. Alaci	† *Gheorghe Țițeica* . . .	137

III. NOTE MATEMATICE.

a) Aritmetica și Teoria Numerelor.

7.[1] Gh. Buicliu	Numere interesante cu 10 cifre diferite	51
8. A. Gloden	Sur la représentation de certains carrés par des demi-sommes de 3 bicarrés et des sommes de 3 carrés .	53
16. V. Thébault	Sur des carrés curieux . .	90
19. St. Cetățeanu	Numere interesante cu 10 cifre diferite	102

b) Algebră.

1. Gloden	Résolution en nombres entiers du système diophantien: $x^3 + a x y = u^k$, $x^3 + b x z = v^l$; a et b représentant des entiers donnés	7
2. A. Gloden	Problèmes d'analyse diophantienne	Pag. 15
4. A. Gloden	Sur la représentation des carrés par une somme de carrés	29
6. Al Moessner	Observări asupra identităților simultane	44
9. M. Ghermănescu	Asupra problemei 1619 . .	64
10. V. Alaci	Soluția generală, rațională a problemei 1619	65
11. V. Alaci	Soluția generală, rațională a sistemului: $x+y+z=a+b+c$, $x^3+y^3+z^3=a^3+b^3+c^3$	67
12. M. Ghermănescu	Complectare la nota No. 9	68
13. A. Gloden	Problème d'analyse indéterminée	75
14. N. O. Zaharia	Asupra ecuațiilor algebrice cu rădăcini reale . . .	77
15. Al. Moessner	Bemerkungen zu den Note Matematice 9, 10, 11, 12	88
17. Al. Moessner	Soluția problemei 1708 . .	100
20. A. Gloden	Quelques égalités multigrades d'un ordre élevé . .	116
21. A. Gloden	Trouver une solution à deux paramètres de l'équation: $x_1^4+2x_2^4+3x_3^4 = y_1^4+2y_2^4+3y_3^4$	133
22. A. Gloden	Sur l'identité: $(X^3-Y^3)(Y^3-Z^3)(Z^3-X^3)(X^3+Y^3+Z^3) = [X(Y^3-Z^3)]^3+[Y(Z^3-X^3)]^3+[Z(X^3-Y^3)]^3$ . .	146

c) Geometrie.

3. V. Claudian	Asupra unei probleme de geometrie	15
5. N. N. Nihăileanu	Notă asupra unor probleme	29
18. Gh. Buicliu	Asupra problemei 1569 . .	101

IV. BIBLIOGRAFIE.

Pl. Andronescu	Die Mindestzahl der bei Untersuchung elektrostatischen, magnetostatischen u. elektromagnetischen Erscheinungen erforderlichen Willkürlichen Einheiten . . .	103
Pl. Andronescu	Die ergebnisse der Wissenschaftlichen Untersuchung der Magnetischen Kreise mit Hilfe der Mathematik . .	147
Th. Anghelutza	Sur une propriété qui caracterise la transformation conforme	17
Th. Anghelutza	Sur une équation fonctionnelle qui definit les polynomes à plusieurs variables	Pag. 17
Th. Anghelutza	Une demonstration nouvelle du théorème: Une fonction dont la dérivée est nulle dans une intervalle, a la même valeur dans cet intervalle	45

[1]) In această coloană sunt înscrise numerele de ordine ale notelor.

		Pag.
C. Bakonyi	Rolul technicei şi al inginerului în criza economică	134
V. Blaşian	Terminologia technică românească privitoare la construcţiile miniere	134
Boletin Matematico	8, 17, 30, 45, 79, 90, 103, 116, 117, 134	
Buletin, al Asociaţiei absolvenţilor Şcoalei Sup. P. T. T.	8, 31, 45, 80	
Buletinul Muzeului regional al Basarabiei din Chişinău		55
Buletinul şedinţelor (Soc. rom. de Ştiinţe)		30
Bulletin de Mathématiques et de Physique, pures et appliquées de l'École Polytechnique Roi Carol II.		16
Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences,		8
Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara		55
C. D. Buşilă	Formarea inginerilor	117
C. I. Călniceanu	Contribuţiuni la normalizarea industriei româneşti	134
Ciel et Terre	8, 17, 30	
I. Cristescu	Memoriu de lucrări publicate	134
V. Cristescu	Culegere de probleme de trigonometrie	80
I. Curea	Determinarea polului ceresc pe cale astrografică	55
I. Curea	Astrographische Bestimmung der Lage des Himmelspoles	55
P. Delens	Tétraèdre et sphères de *Roberts*	31
Gazeta Matematică	8, 16, 30, 45, 55, 79, 90, 103, 116, 133, 147	
D. Germani	Sur le coup de Belier Construction d'oscillogrammes théoriques	17
Gh. Th. Gheorghiu	Sur les fonctions génératrices des polynomes de Laguerre généralisées	17
Gh. Th. Gheorghiu	Sur les coefficients de la factorielle et sur deux classes de polynomes harmoniques	17
Gh. Th. Gheorghiu	Sur les fonctions hypergeométriques confluentes	55
Gh. Th. Gheorghiu	Asupra suprafeţelor *Ţeţeica*	117
Gh. Th. Gheorghiu	Sur les réseaux à invariants égaux	117
Gh. Th. Gheorghiu	Memoriu de titluri şi lucrări	117
M. Ghermănescu	Sur un problème de Mécanique	17
M. Ghermănescu	Sur les combinaison exceptionnelles des fonctions entières	17
A. Gloden	Notes d'arithmétique	31
A. Gloden	Sur les égalités multigrades	90
A. Gloden	Sur les puissances des membres entiers de la forme: $m^3+amn+n^3$	91
C. Iacob	Sur le calcul approché du coefficients de contraction d'un jet gazeux	8
A. G. Ioachimescu	Culegere de probleme de Algebră	103
V. A. Laţiu	Contribuţiuni la studiul microfiziografic al granitului dela Şoimoş-Radna (J. Arad)	147
Muthematica		8
A. Moessner	Numerical identies	31
A. Moessner	Einige diophantische Gleichungen	31
A. Moessner	Zahlentheoretische Untersuchungen und Resultate	55
P. Nicolau şi **V. Gheorghiu,** Determinarea pierderilor de sarcină în conducte circulare drepte de diametru 250 mm. şi 125 mm.		17
Pitagora	17, 30, 80, 117, 134,	147
Cr. Predescu	Studiul averselor la Cluj	134
Cr. Predescu	Zece ani de funcţionare a observatorului Metereologic din Cluj	134
Cr. Predescu	Insolation et nébulosité à Cluj	134
Cr. Predescu	Determinări comparative de temperatură între vechea şi noua staţiune metereologică din Cluj	134
Cr. Predescu	Girueta electrică numai cu 2 conductori	134
Revista de Ciencias	79,	133
Revu mathématique de l'union interbalkanique		17
D. E. Shmith and **Jekuthial Ginsbury,** Numbersand Numerals		80
Sphinx		45
E. Stern	Über irreguläre Pandiagonale lateinische Quadrate mit Primzahlseitenlänge u. ihre Bedeutung für das *n* Königinnenproblem sowie für die Bildung magischer Quadrate	117
Ştiinţă şi Progres	8, 45, 55, 103, 117,	134
C. C. Teodorescu	Memoriu de: titluri şi lucrări	147
V. Thébault	Sur la géométrie de triangle et du tétraèdre	31
V. Thébault	Notes de Géométrie	103
T. Vescan	Mecanica şi teoria relativităţii	80
T. Vescan	The cosmogonical problem of the annihilation of the sun's mass, and the evolution of planetary orbits	80
Th. Vescan	Carriculum vitae	80
N. O. Zaharia	Matematicele în filozofia lui *Auguste Comte*	80
I. Zamfirescu	Asupra autofretajului	103

V. CHESTIUNI DE EXAMEN.

Şcoala Politechnică din Timişoara, Examen de intrare în anul pregătitor 1938—39 102

VI. DIVERSE INFORMAŢIUNI.

Acordarea premiului. din fondul creiat la R. M. T. pe seama unui elev al liceului „*Ion Maiorescu*" din Giurgiu, publicat în R. M. T. anul XVII. No. 9, p. 100 31
Săptămâna Matematică dela Cluj 54
Nota Redacţiei referitor la Nota Matematică No. 9 . 68

VII. ERATA.

Schimbarea problemei No. 1485 36
Complectarea problemei No. 1274, a cărei rezolvire s'a publicat în vol. XVIII. pag. 20 36
Complectarea problemei 1291, a cărei soluţie s'a publicat la pag. 46, vol. XVIII. 60
Rectificarea problemei No. 1662 84
Autorul problemei No. 1680 84
Complectarea problemei No. 1725 120

VIII. PROBLEME PROPUSE ŞI REZOLVATE.

Numărul din coloana 1) arată numărul problemei propuse, cel din coloana 2) pagina la care a fost propusă, cel din coloana 3) volumul în care a fost propusă şi cel din coloana 4) pagina la care a fost rezolvată în volumul XVIII. Problemelor care nu au nimic în coloana 4), nu li s'a publicat încă soluţia.

1).	2).	3).	4).
42	94	I	17
50	110	„	
69	142	„	
88	174	„	
91	187	„	134
92	187	„	
98	187	„	
100	14	II	
110	14	„	
121	30	„	
124	46	„	
140	62	„	
141	62	„	
164	94	„	
175	110	„	
176	126	„	117
178	126	„	
185	126	„	
191	142	„	
194	142	„	
206	174	„	
217	185	„	
230	14	III	
235	30	„	
244	46	„	
255	62	„	
259	62	„	
264	78	„	45
268	78	„	
275	94	„	
289	126	„	
291	126	„	
296	142	„	
313	174	„	
315	174	„	
317	174	„	
344	30	IV	
345	30	„	
347	46	„	
357	62	„	
359	62	„	
361	78	„	
369	94	„	
376	94	„	
382	110	„	
390	126	„	
393	126	„	
406	158	„	
407	158	IV	
411	158	„	
414	174	„	
418	174	„	
423	191	„	
424	191	„	
435	13	V	
440	30	„	
444	30	„	
450	46	„	
458	62	„	
478	94	„	
479	94	„	
489	126	„	
516	174	„	
519	190	„	
524	190	„	
531	14	VI	
	122	IX	
535	30	VI	
542	46	„	
543	46	„	
548	46	„	
550	62	„	
557	78	„	
562	78	„	
569	94	„	
606	174	„	
608	174	„	
612	190	„	
613	190	„	
616	190	„	
622	22	VII	
634	54	„	
635	54	„	
649	86	„	
654	102	„	
656	102	„	
658	102	„	
686	134	„	
695	190	„	
762	126	VIII	
766	126	„	
769	142	„	
772	142	„	
782	174	„	
794	190	VIII	
851	96	IX	
858	108	„	
860	108	„	
867	122	„	
879	144	„	
908	36	X	
924	60	„	
938	84	„	
939	84	„	
954	108	„	
961	120	„	
971	132	„	
971 bis	132	„	
979	138	„	
982	12	XI	
984	12	„	
992	24	„	
993	24	„	
1000	36	„	
1001	36	„	
1002	36	„	
1008	48	„	
1009	48	„	103
1012	48	„	
1017	60	„	
1018	60	„	
1027	72	„	
1035	84	„	
1036	84	„	
1037	84	„	
1043	96	„	
1044	96	„	
1060	120	„	
1067	132	„	
1068	132	„	
1077	138	„	
1085	12	XII	
1093	24	„	
1107	48	„	
1108	48	„	
1115	60	„	
1116	60	„	
1119	60	„	
1125	72	„	
1126	72	„	
1129	84	„	
1133	84	„	
1134	84	„	
1140	96	„	
1142	96	„	
1145	96	„	55
1146	108	„	
1149	108	„	
1156	120	„	
1157	120	XII	
1158	120	„	
1160	120	„	
1161	132	„	
1163	132	„	
1166	132	„	
1167	132	„	
1173	138	„	
1174	138	„	
1182	12	XIII	
1183	12	„	
1187	24	„	
1188	24	„	
1195	36	„	
1198	36	„	
1205	48	„	
1206	48	„	
1212	60	„	
1213	60	„	
1216	60	„	
1218	72	„	
1219	72	„	
1220	72	„	
1223	72	„	
1224	72	„	
1225	84	„	
1228	84	„	
1229	84	„	
1231	84	„	
1234	96	„	
1236	96	„	
1241	108	„	
1243	108	„	
1245	108	„	
1248	120	„	
1250	120	„	
1253	120	„	
1258	132	„	
1262	132	„	
1263	132	„	104
1266	132	„	105
1268	141	„	
1270	141	„	
1272	12	XIV	
1274	12	„	20, 36
1275	12	„	
1279	12	„	8
1280	24	„	
1281	24	„	80
1282	24	„	9
1289	36	„	
1290	36	„	
1291	36	„	46, 60

1).	2).	3).	4).
1292	36	XIV	10
1294	36	„	21
1295	36	„	
1296	52	„	
1297	52	„	21
1298	52	„	
1299	52	„	
1300	52	„	
1306	64	„	
1307	64	„	
1308	64	„	
1309	64	„	
1311	64	„	
1315	76	„	
1319	76	„	
1322	88	„	
1323	88	„	
1325	88	„	
1327	88	„	
1331	100	„	
1333	100	„	
1334	100	„	147
1341	112	„	
1349	124	„	
1350	124	„	
1351	124	„	
1354	136	„	
1357	136	„	
1363	148	„	
1364	148	„	
1365	148	„	
1370	12	XV	
1371	12	„	
1372	12	„	135
1377	24	„	
1378	24	„	
1379	24	„	
1380	24	„	
1385	36	„	
1386	36	„	
1387	36	„	31
1388	36	„	11
1389	36	„	
1390	36	„	
1391	36	„	
1393	48	„	
1395	48	„	
1396	48	„	
1398	48	„	23
1402	60	„	
1405	60	„	
1406	60	„	
1407	60	„	
1413	72	„	
1414	72	„	

1).	2).	3).	4).
1419	84	XV	
1422	84	„	
1423	84	„	
1427	96	„	
1428	96	„	
1430	96	„	
1435	108	„	105
1436	108	„	
1437	108	„	118
1438	108	„	
1442	120	„	
1443	120	„	
1445	120	„	32
1446	120	„	
1447	120	„	
1450	132	„	
1454	132	„	
1459	144	„	148
1460	144	„	
1461	144	„	
1466	16	XVI	82
1472	28	„	
1474	28	„	
1475	28	„	
1478	28	„	
1482	40	„	
1483	40	„	
1485	40	„	
	36	XVIII	
1486	40	XVI	
1489	52	„	
1490	52	„	
1492	52	„	
1493	52	„	
1494	52	„	
1496	52	„	
1498	64	„	
1501	64	„	
1502	64	„	
1507	76	„	
1511	76	„	
1514	88	„	
1515	88	„	148
1516	88	„	
1525	100	„	
1526	100	„	33
1530	112	„	
1531	112	„	
1532	112	„	
1533	112	„	33
1534	112	„	
1536	112	„	
1542	124	„	
1543	124	„	
1545	124	„	

1).	2).	3).	4).
1547	136	XVI	
1548	136	„	
1553	136	„	
1554	147	„	
1555	147	„	
1557	148	„	
1558	148	„	
1559	148	„	
1560	148	„	
1561	148	„	
1563	12	XVII	
1563	12	„	
1564	12	„	
1566	12	„	
1567	12	„	56
1568	12	„	
1569	12	„	91
1570	24	„	12
1571	24	„	
1574	24	„	
1575	24	„	
1577	24	„	
1581	36	„	
1582	36	„	
1583	36	„	
1584	36	„	47
1585	36	„	34
1586	48	„	
1587	48	„	106
1588	48	„	
1589	48	„	
1590	48	„	
1591	48	„	69
1592	48	„	35
1593	48	„	
	96	„	57
1594	60	„	
1595	60	„	
1596	60	„	
1597	60	„	
1598	60	„	69
1599	60	„	70
1600	60	„	
1601	60	„	35
1602	72	„	
1603	72	„	106
1604	72	„	
1605	72	„	
1606	72	„	107
1607	72	„	
1608	72	„	58
1609	72	„	
1610	84	„	
1611	84	„	71
1612	84	„	

1).	2).	3).	4).
1613	84	XVII	
1614	84	„	
1615	84	„	
1616	84	„	58
1617	84	„	
1618	96	„	
1619	96	„	47
1620	96	„	92
1621	96	„	
1622	96	„	
1623	96	„	59
1624	96	„	
1625	108	„	83
1626	108	„	
1627	108	„	
1628	108	„	
1629	108	„	
1630	108	„	
1631	108	„	
1632	108	„	
1633	120	„	
1634	120	„	
1635	120	„	92
1636	120	„	
1637	120	„	
1638	120	„	
1639	120	„	
1640	120	„	
1641	132	„	
1642	132	„	
1643	132	„	
1644	132	„	
1645	132	„	
1646	132	„	
1647	132	“	
1648	132	„	
1649	144	„	119
1650	144	„	94
1651	144	„	
1652	144	„	
1653	144	„	
1654	144	„	
1655	144	„	
1656	144	„	
1657	144	„	
1658	12	XVIII	
1659	12	„	
1660	12	„	
1661	12	„	
1662	12	„	
1663	12	„	94
1664	12	„	
1665	12	„	
1666	24	„	
1667	24	„	

1).	2).	3).	4).
1668 .	24 .	XVIII	
1669 .	24 .	„	
1670 .	24 .	„	
1671 .	24 .	„	
1672 .	24 .	„	
1673 .	24 .	„	
1674 .	36 .	„	
1675 .	36 .	„	
1676 .	36 .	„	
1677 .	36 .	„	
1678 .	36 .	„	
1679 .	36 .	„	
1680 .	36 .	„	
1681 .	48 .	„	
1682 .	48 .	„	
1683 .	48 .	„	
1684 .	48 .	„	
1685 .	48 .	„	
1686 .	48 .	„	
1687 .	48 .	„	
1688 .	48 .	„	
1689 .	60 .	„	
1690 .	60 .	„	
1691 .	60 .	„	
1692 .	60 .	„	
1693 .	60 .	„	
1694 .	60 .	„	
1695 .	60 .	„	
1696 .	60 .	„	
1697 .	72 .	„	
1698 .	72 .	„	
1699 .	72 .	„	
1700 .	72 .	„	
1701 .	72 .	„	
1702 .	72 .	„	
1703 .	72 .	„	
1704 .	84 .	„	
1705 .	84 .	„	
1706 .	84 .	„	
1707 .	84 .	„	
1708 .	84 .	„	
1709 .	84 .	„	
1710 .	84 .	„	
1711 .	84 .	„	
1712 .	96 .	„	
1713 .	96 .	„	
1714 .	96 .	„	
1715 .	96 .	„	
1716 .	96 .	„	
1717 .	96 .	„	
1718 .	96 .	„	
1719 .	96 .	„	
1720 .	108 .	„	
1721 .	108 .	„	
1722 .	108 .	„	
1723 .	108 .	„	
1724 .	108 .	„	
1725 .	108 .	„	
	120 .	„	
1726 .	108 .	„	
1727 .	108 .	„	
1728 .	120 .	„	
1729 .	120 .	„	
1730 .	120 .	„	
1731 .	120 .	„	
1732 .	120 .	„	
1733 .	120 .	„	
1734 .	120 .	„	
1735 .	120 .	„	
1736 .	132 .	„	
1737 .	132 .	„	
1738 .	132 .	„	
1739 .	132 .	„	
1740 .	132 .	„	
1741 .	132 .	„	
1742 .	132 .	„	
1743 .	132 .	„	
1744 .	149 .	„	
1745 .	149 .	„	
1746 .	149 .	„	
1747 .	149 .	„	
1748 .	149 .	„	
1749 .	149 .	„	
1750 .	149 .	„	
1751 .	149 .	„	

TABLOUL NUMELOR[1]

Abason E., 1, 16.
Abramescu N., 1, 36, 55.
Adam D. R., 1.
Adamescu M., 1.
Alaci V., 1, 3, 12, 13, 23, 24, 25, 33, 36, 37, 48, 49, 55, 59, 60, 61, 67, 68, 69, 72, 73, 84, 85, 86, 88, 91, 96, 97, 101, 107, 108, 109, 120, 122, 136, 137, 138, 149.
Almăjan P., 1.
Aman V. C., 12, 47, 57, 69, 70, 71, 72, 91, 106.
Amărăsteanu F. M., 9, 12, 20, 21, 32, 33, 47, 56, 83, 104.
Amăricâ T., 104.
Amenta A., 17.
Anastasescu M. M., 57, 59, 70, 71, 83, 106.
Anastasiade I., 1.
Anastasiu M. M., 70, 72, 83, 107.
Andonie St. M., 47.
Andrievici N., 35, 47, 58, 59, 70, 72, 83, 91, 92, 107.
Andronescu P., 1, 103, 147.
Andrunachievici A. V., 35, 47, 57, 58, 59, 69, 70, 71, 72, 82, 91, 92, 108.
Angelescu A., 1.
Angelescu N. T., 118.
Angheluţă Th., 1, 8, 17, 45, 55, 147.
Aniţescu N., 108, 120.
Anton G. G., 56.
Apollonius, 13, 14.
Apostol R., 10, 20, 33, 34, 35, 58, 68, 91, 104, 105, 148.
Ardelean Şt. 1.
Arend S., 8.
Argeşeanu G., 118.
Arghir I., 1.
Armencea C., 59.
Asachi G., 16, 30, 45, 55, 79, 90.
Aubert, 134.
Avogadro, 117, 134.
Aztiria Ig., 116.

B. I. B., 103.
Babeţi C., 34, 70, 71.
Backer, 30.
Badea M., 16.
Bădescu R., 55.
Baidaff B. I., 1, 17, 30, 79, 116, 134.
Bakony C., 1.
Bakony C., 94, 147.
Bal L., 32.
Balaban N., 30.
Balazs D., 1.
Banach, 8.
Bănărescu M., 1.
Banciu I., 1.
Barral S. I., 30.
Barbilian D., 8.
Bărglăzan A., 1, 46, 120.
Bârlea G. V., 72, 83, 94.
Baron C., 1.
Baumgarten I. I., 12.
Begu I. S. 34, 58, 59, 70, 83, 106, 107.
Beleş A., 16.
Berdan C. 46.
Berinde L. T., 12, 34, 35, 47, 56, 57, 58, 69, 70, 71, 72, 91, 106 107, 108.
Bernoulli, 16.
Biernacki M., 54.
Blaşian V., 1, 134.
Bloch A., 90.
Blumenthal M. L., 79.
Bobârnac M., 1.
Boerescu P. G., 104.
Boeriu V., 104.
Bogdan M., 118.
Boldescu P., 80.
Boiangiu I. G., 104.
Bonea I., 1.
Borş C., 99.
Botez M., 1, 58, 84, 86, 106, 108.
Botez M., 1.
Brădăţeanu C. C. 118.
Brădeanu N., 69, 70, 83, 94, 107.
Brătescu H. M., 118.
Bratu G., 1, 55.
Bratu M., 17.
Breazu D., 1.
Brelot M., 8.
Bucur D. V. 105.
Budeanu C., 10, 16, 105.
Buicliu Gh., 1, 12, 16, 18, 20, 21, 23, 24, 36, 48, 53, 56, 60, 61, 82, 84,

[1]) Numerele care urmează după nume, arată paginile în care se găsesc publicate numele.

86, 102, 108, 118, 119, 120, 135, 136, 147, 148, 149.
Buşilă D. C., 117.
Buznea D. D., 35, 47, 59, 68, 70, 72, 91, 92, 93, 107, 120.

Căbăşanu I., 118.
Calcagno E. H., 90.
Călniceanu C., 1, 134.
Călugăreanu G., 54, 79.
Câmpan Fl. 30.
Cândea C., 1, 55.
Capriel H., 90.
Caraman A., 105.
Carimir E. A., 103.
Căşveanu C., 104.
Catona V., 1.
Catlaneo P., 8, 79.
Cauchy, 79.
Cazanacli V. P., 11, 12, 16, 20, 21, 30, 32, 34, 45, 55, 79, 82, 90, 104, 105, 106, 148.
Centea Z., 8, 45.
Cerchez Th., 17, 24.
Cernat C., 57, 72, 83.
Cetăţeanu S. T., 34, 35, 47, 57, 58, 59, 70, 71, 72, 83, 92, 102, 106, 108.
Ceva, 4, 6.
Charpentier L., 54.
Chirnoagă E., 16.
Ciobanu I., 103.
Cioc I. D., 70, 106.
Ciorănescu I. C., 118.
Ciorănescu N., 8, 17, 54, 86.
Claudian V., 1, 16, 79, 89.
Clausen, 87, 88.
Coca A., 1.
Coman A., 1, 96, 134.
Comănescu A., 1.
Comloşan Cornelia, 33, 34, 91.
Constantinescu G. G., 1, 134.
Constantinescu Gh. 1, 25, 61, 73.
Constantinescu J., 16.
Contrea A., 1.
Corti S. J., 79.
Coşniţă C., 104, 134, 147.
Costăchescu D. C., 1.
Costăchescu V. C., 96.
Crăinicescu Gh., 135.
Cristea G., 118.
Cristea N. I., 149.
Cristescu C. I., 103.
Cristescu G. D., 12, 57, 72, 91, 107, 120.
Cristescu I., 1, 134.
Cristescu V., 80.
Cristodulo N., 1, 55.
Cserveny I., 1.
Curea I., 1, 24, 55, 95.
Czirjak L., 107.

Damian I. I., 104.
Dăscălescu S. H., 34, 35, 47, 56, 57, 58, 59, 68, 69, 70, 71, 72, 83, 91, 92, 94, 106, 107.
Dăscălescu V. C. 105.
David G., 118.
Deceanu G., 9.
Decerf A., 45.
Deciulescu Gh., 33, 36, 70, 71, 72, 91.
Delens P., 31.
Demetrescu Gh., 1.
Desargues, 10.
Detouches L. I., 54, 55.
Diaconescu D. I., 34, 35, 47, 58, 60, 69, 72, 83, 91, 92, 94, 107.
Diaconescu M., 58, 59, 60, 70, 72, 83, 106, 107.
Diaconescu N., 1.
Dirichlet, 55.
Djebcu L., 57.
Doboş E., 55.
Doeblin W., 8.
Dobrescu P., 9.
Dobrozemschi M., 1.
Dobrzycki S., 8.
Dombrowschi I., 83.
Dordea A. T., 118.
Dospinescu N., 118.
Dragomirescu D. E., 118.
Drăgulescu G. G., 71, 72, 92.
Dufour L., 8.
Dumitrescu G. M., 118.
Dumitriu-Dada, 1.

Emanuel David, 88.
Enache I., 83.
Enăşescu D. D., 105.
Epurescu V., 31.
Euclide, 45, 147.
Euler, 25, 17.

Festraets A., 17,
Feuerbach, 8, 55.
Filipescu E. G., 8, 16, 30.
Florescu L. V., 20, 33, 34, 35, 47, 58, 71, 83, 91, 105, 106, 108, 149.
Florescu M., 1.
Ficşeneanu I. M., 45, 103, 135.
Fortet R., 133.
Fourier, 113.
Frăţici I., 1.
Freedman B., 17.

Galab S., 79.
Garcia G., 80.
Gauss, 21, 23.
Gavrilescu N. C., 21.
Geisinger Hilda, 17.
Georgescu C., 16.
Georgescu D., 1.
Georgescu Val N. I., 118.
Georgescu R., 30.
Germani D., 16, 17.
Gheorghiu A., 79, 80.
Gheorghiu Th. Gh., 17, 55, 80, 116, 117.
Gheorghiu V., 1, 17, 55.
Ghermănescu M., 1, 17, 45, 54, 55, 56, 65, 68, 88, 101, 120.
Ghiţescu Sp., 1.
Gillis P., 54.
Gil Valera I., 134.
Ginsburg I., 80.
Girard, 8.
Gloden A., 1, 7, 8, 12, 15, 24, 29, 31, 35, 36, 37, 45, 48, 54, 58, 60, 79, 84, 85, 90, 91, 96, 97, 100, 101, 103, 108, 116, 117, 120, 133, 147.
Gligor N. I., 72, 94, 107, 120.
Godeanu V., 31.
Godron N., 45.
Goga E. M., 118.
Goldstein I., 46.
Gonzales O., 8, 79, 116.
Goursat E., 86.
Grofşoreanu I. G., 46, 118.
Grumăzescu M., 12, 60, 69, 94, 120.
Grünfeld M., 48.
Gutierrez Novoa L., 134.

Herman A. V., 32, 136, 148.
Henrtley A., 134.
Hollinger A., 80.
Hristea H., 1.
Humbert P., 45.

Iacob C., 8, 55.
I. I., 147.
Ioachimescu G. A., 103.
Iliescu E., 118.
Ionescu-Biss H. P., 1.
Ionescu Bujor C., 1, 20, 30, 103, 147.
Ionescu D. V., 55.
Ionescu E., 56.
Ionescu I., 8, 16, 21, 30, 135, 147.
Ionescu I. N., 118.
Ionescu I. P., 46.
Ionescu Pelican, 8, 55, 103.
Ionescu Ţiu, 1, 24, 48, 56, 57, 58, 84, 94, 96, 108, 136, 149.
Iorgulescu T., 1.
Istrati I. C., 45.
Ivănescu C., 24, 36, 72, 104, 117.

J. Iza, 79.
Janet G., 45, 103, 117.
Jidanu I. C., 56, 58, 59, 60, 69, 70, 71, 72, 83, 91, 92, 93, 94, 95, 106, 108.
Jipa C. A., 47, 92.
Jordan, 134.

Kassagian A., 118.
Katz P., 46.
Katz S., 118.
Kielburger M., 1.
Kivu C. M., 33, 83, 119.
Kirilov G., 147.
Komischke A., 80.
Kornis E., 12, 83, 91.
Krasner M., 8.
Kubota M., 16.
Kühu I., 1, 55.
Kurepa G., 8.

Lagrange, 25.
Laguerre, 17.
Lalescu Tr., 36.
Lambrino G., 2.
Laţia P. C., 104.
Laţiu V., 2, 147.
Lăzărescu S., 33.

Lemoine, 14.
Leonida D., 2.
Lepolszky C., 47, 56, 59, 72, 94.
Leray, 54.
Linteş I., 2, 84, 96, 133.
Liteanu G., 2.
Losada C., 80.
Loziciu D. I., 9, 82.
Lungu I., 103, 117, 134.
Lupan, 2.
Lupescu G. C., 12, 32, 35, 56, 57, 70, 71, 91, 95, 107, 136.

Macoski E., 2.
Magheru I., 2.
Mahrenholz J., 48, 60, 92.
Mălăcea I., 117.
Manughevici C., 2.
Manuilă S. A., 83, 91.
Marcuzon L., 71.
Mardan D., 2.
Mărgineanu I., 10.
Marian V., 8, 45, 55, 103.
Marica I., 32, 119.
Marica Pompeiu, 33, 106.
Marinescu I., 2.
Marinescu I. I., 118.
Măru D., 118.
Mateescu C., 16.
Mateescu S., 2.
Matei D. D., 32, 34, 35, 47, 57, 58, 69, 70, 71, 91, 92, 106, 107, 108 148.
Matei I. A., 95, 136.
Măţieş V. I., 55.
Mazilu C. P., 56.
Mazurkiewitz S., 8.
Mecu I. I., 104.
Mecu P. M., 104, 105.
Medeleanu I., 12, 57, 69, 70.
Menelaus, 4, 5, 10.
Mereuţă E., 21.
Mickel H., 17.
Miclescu A., 118.
Mihăileanu C. A., 72, 94.
Mihăileanu N. N., 2, 8, 13, 17, 30, 32, 33, 35, 36, 45, 46, 48, 55, 60, 68, 71, 72, 92, 104, 105.
Mihaiu E., 2.
Mihalcea I. O., 10, 105.
Mihalcea N. N., 11.
Mihoc G., 16, 79, 90.
Milakovitch, 17.
Milea G. E., 10.
Miloia I., 2.
Milu I. N., 34, 35, 56, 59, 69, 83, 92.
Mioc V., 2.
Miquel, 10, 79.
Mironescu I. D., 92.
Mişca C. K., 136.
Mitran S. G., 118.
Mocanu N. V., 119.
Modâlcă S. E., 34, 35, 47, 57, 58, 59, 60, 72, 83, 91, 92.
Moessner A., 31, 45, 47, 53, 55, 64, 65, 67, 79, 89, 90, 101, 103, 116 136.
Moldoveanu C., 83, 94, 107, 120.
Montel P., 8, 54, 55, 79.
Motaş C., 35, 47, 57, 59, 70, 71, 83, 92, 106, 107.
Murgu M. I., 82.
Murgu V. M., 12, 34, 47, 57, 69, 91, 149.
Murgulescu Elena, 2.
Murgulescu G. I., 2.
Munteanu L., 118.
Munteanu V. L., 45.

N. M., 10, 21, 36, 57, 105, 117.
Nadaşan S., 2.
Naneş Cornelia, 33, 119.
Naneş G., 2.
Nedelcu D. V., 149.
Negrea A. L. M., 9, 12, 20, 21, 23, 32, 34, 58, 59, 60, 69, 82, 83, 91, 95, 105, 106, 107, 148.
Negulescu V. S., 33.
Nestor G. D., 46.
Newton, 8, 95.
Nichifor G., 2.
Nicoară D. C., 105.
Nicolau A., 2.
Nicolau P., 2, 17, 55.
Nicolescu Cr., 17.
Nicolescu I. M., 33.
Niculescu G. H., 2.
Niculescu I., 118.
Niculescu M., 2, 8, 16.
Nistorescu D. V., 149.
Noguera R., 8.

Ogrin N., 2.
Onicescu O., 2, 8, 16, 54, 116.
Orăşeanu C., 2.
Orăşeanu Gr. 2.

Pădureţ A. V., 83.
Pantazi Al., 8, 54.
Papadopol Elena, 48, 106.
Pasăre E., 59, 70, 83.
Păşculescu V., 104.
Patriciu V., 2.
Pavel D., 17.
Peano, 54.
Petrescu A., 2.
Petrescu C. A., 34, 35, 36, 47, 58, 71, 107.
Petrescu-Craioviţa A., 32.
Petrescu M., 149.
Petrescu P. B., 34, 35, 47, 107.
Petrovich M., 8.
Piccard S., 8.
Pintilie Gr., 134.
Pipoş P., 103.
Pitagora, 106.
Poalelungi G. V., 83.
Pompeiu D., 8, 14, 16, 30, 54, 55, 80.
Pop L., 104.
Popa D. M., 59, 72, 94, 95.
Popa N., 10, 11, 21, 82, 148.
Popa D. T., 105.
Popea Gh. O., 45.
Popescu Ad., 34, 60, 69, 70, 83, 91, 92.
Popescu-Zorica N. A., 34, 35, 47, 57, 58, 71, 72, 91.
Popescu N. C., 118.
Popescu E., 2.
Popescu V. Fl., 57.
Popescu I., 2.
Popescu-Voiteşti I., 134.
Popescu G. V., 105.
Popovici C. A., 83.
Popovici C., 8, 30.
Popovici I. G., 11, 34, 35, 47, 69, 70, 71, 72, 82, 83, 92, 106.
Popovici T. I., 118, 135.
Popovici C. Y., 118.
Popoviciu C. M., 34, 35, 58, 59, 69, 70, 71, 92, 94.
Popoviciu Tib., 8, 46, 135.
Pora A. E., 134.
Postelnicescu C. M., 8, 10, 20, 21, 47, 105, 148.
Prager W., 17.
Predescu C., 134.
Predoescu I. M., 10, 20, 21, 56, 82.
Protopopescu I., 2.
Ptolomeu, 14, 55, 104.
Purcariu, I., 2.

Racliş N. R., 2.
Racoţeanu C., 105.
Rădulescu G. O., 33, 35, 47, 56, 58, 68, 69, 70, 83, 91, 106, 107, 108, 149.
Răduleţ R. B., 2.
Rajka Z., 12.
Râmniceanu I. C., 46.
Rauch I., 32.
Răuţ C., 118.
Reicher H., 12, 34, 35, 47, 58, 60, 69, 70, 71, 72, 92, 107.
Ripianu A., 33, 34, 47, 56, 68, 71, 83, 91.
Rizescu I., 11.
Roberts, 31.
Roibănescu C., 2.
Rosenblatt A., 133.
Rosenblatt S. M., 35, 57, 58, 69, 70, 71, 91, 106, 108.
Roth I. A., 35, 57, 59, 60, 71, 72, 92, 95, 107.
Rozini M., 118.
Rusu E., 45.

Sabac G. I., 105.
Saegiu V. C., 35, 71, 92.
Sâmbotin G., 10, 20, 105.
Şandor V., 34, 35, 58, 71, 72, 83, 92 107.
Săruleşteanu I. E., 12, 47, 58, 60.
Sauciuc L., 2.
Savin C. I., 2, 72.
Savin Maria, 20.
Săvulescu S., 10, 82.
Schander, 54.
Schileru I., 2, 8.
Schultz W., 45.
Schwartz, 79.
Scripcă L., 118.
Segal Joe, 47, 59, 69, 70, 71, 83, 92, 94, 107, 120.
Segal Z., 34, 36, 47, 58, 59, 69, 70, 71, 72, 83, 92, 94, 95, 107, 108, 120.

Selmereanu H., 59, 71, 83, 94, 107.
Sergescu P., 2, 54, 55, 116.
Severineanu C., 2.
Sierpinski W. 8.,
Silion G. I., 46, 135.
Simionescu D. G., 46, 55, 70, 104, 147.
Simionescu G. D., 2, 14.
Simson, 104, 147.
Sispanov, 79, 116.
Slavov I., 47, 59, 69, 70, 71, 83, 92, 94, 107, 120.
Smigeischi O., 2, 46.
Smith E .D., 80.
Solomon I., 34 35, 47, 57, 58, 59, 69, 70, 71, 72, 83, 92, 107.
Staicu I. N., 59, 70, 71, 72, 92.
Stamate I. I., 34, 35, 36, 48, 57, 58 59, 71, 106, 136, 149.
Stamatescu I. 2.
Stamatin M., 46.
Stambuleanu A., 2.
Stan D. A., 16.
Stan I. A., 2, 8.
Stăncescu C., 2.
Stantzel E., 2.
Stratilescu G., 17.
Ştefănescu A., 104.
Ştefănescu C., 33, 35, 71.
Ştefănescu F. M., 34, 35, 47, 48, 58, 59, 60, 69, 70, 71, 72, 83, 92, 96, 107, 108, 120, 149.
Ştefănescu D. N., 12, 20, 21, 32, 34, 47, 58, 92.
Ştefănescu-Sabba, 17.
Stern E., 117.
Sternberg H., 33.
Stewart, 79.
Stoenescu I. A., 135.
Stoenescu D. M., 12, 34, 35, 47, 57, 58, 59, 60, 70, 71, 72, 83, 92, 95, 120.
Stoicescu L., 2.
Stoilov S., 54, 86.
Stroombant, 17.
Subov I., 2.
Süli M., 104.
Swings P., 17.

Tărăbuţă C. P., 46.
Taraş V., 46.
Tătaru A., 92, 94, 107.
Teodorescu C., 2, 3, 13, 25, 37, 41, 49, 61, 73, 85, 97, 109, 121, 137, 147.
Teodorescu N. D., 20,57, 59, 72, 92.
Teodorescu N., 17, 54.
Teodosiu A., 2.
Thales, 3, 4.
Thébault V., 8, 31, 55, 83, 90, 96, 103, 116, 149.
Theodoru H., 16.
Tică Gall P. H., 34, 36, 57, 72, 83, 84, 92.
Tilică St. C., 12, 34, 35, 47, 56, 57, 58, 59, 60, 69, 70, 71, 72, 83, 92, 93, 94, 107, 108, 120.
Tighilin G. R., 105.
Tino O., 2, 3, 103, 133.
Titeica Gh., 16, 116, 117, 137.
Titeica I. I., 20, 21, 47, 147.
Toledo A. P., 79.
Tomescu C., 45.
Topalescu S. G., 92.
Trăsnitu N., 105.
Trică S. I., 72.
Tschakaloff L., 8.
Tsclak J., 79.
Turcu S., 56, 59, 94.
Tutunaru D., 47.

Ulman O., 20.

Vâlcovici V., 2.
Văduva F. M., 31.
Varignon, 33.
Vasilescu-Karpen, 16.
Vasilescu N. V. A., 105.
Vasiliu A. C., 105.
Vasiliu C. I., 46, 118, 135.
Vasiliu G., 105.
Vasiliu M., 17, 105.
Vasu V., 12, 24, 60, 72, 136.
Veronese, 8.
Vescan T., 2, 9, 17, 55, 79, 80.
Viciu A., 2, 8, 83.
Vijelie G.,E., 47, 70, 72, 83, 92.
Vişa E., 49, 91, 117.
Vivanti G., 79.
Vlad I. M., 9, 20.
Vlad M. C. I., 33, 34, 57, 69, 72, 82, 92, 106, 119.
Vlad I. V., 2.
Vlădescu I., 2.
Voicu I. A., 71, 92.
Vols E., 45, 55.
Volterra M., 8.
Vrânceanu G., 8.
Vulich B., 8.

Wager W., 5, 118.
Weics L., 118.

Zagaican I., 32, 83.
Zăgănescu I., 2.
Zaharia N. O., 2, 79, 80, 116.
Zamfirescu G. I., 12, 84, 103, 104.
Zapan Gr., 2, 103, 116, 117.

Nota Redacţiei. Tabla de materii a fost întocmită de d-l Inspector *V. Mioc,* asistent la Şcoala Politechnică, căruia îi aducem vii mulţumiri.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Andrievici N. (1688); *Aniţescu Nicolae* (1654); *Bârlea V. Suhăţeanu* (1573, 1579, 1580, 1584, 1590, 1673, 1681, 1683, 1720, 1727, 1729); *Bârzu Gh. Vasile* (1728, 1729); *Borneas Marius* (1502, 1673); *Checian N. Ana* (1639, 1664, 1696); *Chintescu Matei* (P., 1704, 1727, 1729); *Ciceiu Cetate* (1684, 1692, 1693, 1737); *Cristea I. C-tin* (1683, 1729); *Cristea I. Nicolae* (P., 1411, 1567, 1570, 1574, 1597, 1638); *Doscan Gh. Alexandru* (1630, 1681, 1729); *Dragomir Ermin* (1696, 1729); *Gheorghiu A. Alexaandru* (1728, 1729); *Gligor N. Ioan* (P, 1664, 1673, 1688, 1691, 1696, 1697, 1703, 1729); *Hermann I. Carol* (1659, 1668, 1681, 1684, 1687, 1690, 1704); *Luca I. Ioan* (1439, 1681, 1683, 1688, 1691, 1696, 1697, 1703, 1704, 1707, 1729, 1730); *Mihăileanu C. Andrei* (1683, 1696, 1704, 1707, 1729, 1730); *Mureşan I. Octavian* (1502, 1596, 1673, 1701, 1734); *Musca M. Miron* (1726); *Popescu V. C-tin* (1704); *Radu G. Ionel* (1674, 1681, 1683); *Şelmerean Horia* (1668, 1737); *Şerban C. C-tin* (1729); *Simon Petru* (P., 1683, 1691, 1699, 1707, 1734); *Slavov Iacob* (1696, 1704, 1707, 1728, 1730); *Ştefănescu F. Marin* (1658); *Tătaru Alexandru* (1587, 1597, 1729, 1730, 1738); *Theodorescu N. Dorin* (1405, 1702); *Tilică C. Ştefan* (P, 110, 1002, 1475, 1493, 1515, 1560, 1582, 1646, 1654, 1667 1705, 1707, 1712, 1713, 1716, 1717, 1719, 1720, 1727, 1728, 1729, 1733, 1735); *Vijelie Gh. Eugen* (1727, 1729).

Rugăm pe corespondenţii nostrii, a ne trimete de urgenţă costul abonamentului de 100 (una sută) lei, pentru „R. M. T." pe anul XIX, care începe la 15 Martie 1939.

5 lei